动力系统基础

Dynamical Systems

四川大学数学学院
张伟年　著

5

CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

● 责任编辑：徐　可　　封面设计：王凌波

Dynamical Systems

全书概括地介绍了动力系统的基础知识，同时反映近年来动力系统的新成果。全书共分八章35节，包括迭代与动力系统、周期轨道、双曲结构、结构稳定与分岔、混沌、迭代根、嵌入流以及迭代方程等内容。本书力求简明、精炼、可读，能使读者尽快地掌握动力系统的研究和应用，通向动力系统的学科前沿。

本书既可作为研究生和本科高年级学生的教材，又可作为专门从事动力系统理论研究的学者和涉及动力系统方法的工程技术人员的参考书。



定价：12.00 元

动力系统基础

Dynamical Systems

四川大学数学学院

张伟年　著



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

动力系统基础 / 张伟年 著. - 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，2001.11

ISBN 7-04-010476-8

Ⅰ.动… Ⅱ.张… Ⅲ.动力系统(数学)-教材 Ⅳ.0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 088944 号

责任编辑：徐　可　　**封面设计**：王凌波
版式设计：杨　明　　**责任印制**：陈伟光

动力系统基础
张伟年　著

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	北京民族印刷厂		
开　本	880×1230　1/32	版　次	2001 年 11 月第 1 版
印　张	4	印　次	2001 年 11 月第 1 次印刷
字　数	120 000	定　价	12.00 元

© China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Heidelberg 2001

版权所有　侵权必究

序　言

我们知道，大至宇宙运动、小至微观世界以及生物种群进化、社会经济波动、卫星发射、网络通讯，许多事物的动态变化规律都可以涉及到微分方程的求解问题，因此微分方程的理论和方法一直是现代科学技术发展的关键之一，也是数学研究的重点之一.

自从 1841 年法国数学家 Liouville 证明 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

这样形式简单的微分方程不能通过初等积分法来求解，人们对微分方程的研究从寻找解析解逐步发展为讨论解的分析性质. 随着人们认识水平的不断提高，随着非线性科学研究的蓬勃开展，人们对数学的要求也增高了. 人们不仅需要对微分方程单个解的讨论，而且力图知道一大类解或全部解的总体趋势和结构，不仅满足于对解的局部函数性质的讨论，而且关心轨道（即一个解在对应空间中形成的轨迹）形成的拓扑结构，甚至关心这种结构是否会因为弱小的干扰而导致破坏，在有干扰和无干扰的情形下是否会出现相互不同胚的轨道结构. 人们希望从更高的角度、以更新的观点、用更先进的方法去研究微分方程并获取更多更深刻的结果. 事实上，先师廖山涛院士就在动力系统结构稳定性方面做出了独特的巨大贡献，获得国家自然科学壹等奖.

拓扑学可以说是研究几何空间中一种本质结构的数学分支. 站在拓扑学的角度去分析微分方程，从而揭示事物变化发展的本质规律，这就是现代动力系统理论所追求的. 张伟年同志在这一领域已工作多年，颇有成绩. 现在他将多年的心得与成果总结成这本书，虽然书中几乎看不见一个微分方程，然而，正如他书中一开始所说的，微分方程的

许多定性问题可以化作拓扑空间上连续映射的迭代来解决，而迭代正是动力系统讨论的主题．迭代也是独立于微分方程之外在现代科学技术和人类社会生活中普遍存在的现象．这本书深入浅出，较为全面地阐述了动力系统的基本理论，同时也介绍了近年来的有关新成就．既可以通过这本书了解动力系统的基本思想和主要结果，也可以借助这本书通向动力系统的学科前沿．

这本书的主要内容已在我校研究生教学中多次使用，特别在 2000 年全国数学研究生暑期学校中授课，取得了很好的教学效果．本书的出版必将带动一批年轻的数学爱好者进入这个十分活跃的领域．长江后浪推前浪，中国成为数学强国的前途十分光明．

中国科学院院士

四川大学副校长

刘应明

刘 应 明

2001 年 11 月 12 日于成都

前　言

牛顿力学的基本任务是研究物体的运动轨迹，也就是要研究其位移随时间变化的规律. 在工程中，无论是发动机、桥梁、还是信号传输，人们都要关心系统的振荡形式. 在天文、地理、气象等科学研究中，星体运动轨迹、大气运动现象以及潮涨潮落，这些都是以动态的方式呈现在人们面前. 人们也关心在化学反应过程中各种物质浓度的动态变化，关心生物种群量（包括人口）的衍变规律，关心商品价格的涨跌，关心 $\cdots$. 动力系统就是研究现实问题中状态 x 随时间 t 变化而变化的动态规律.

动力系统研究的是事物运动最根本的规律. 它不仅研究平衡状态、周期状态等基本运动状态的存在性和稳定性，而且更强调运动轨迹的拓扑结构. 它重视运动方式的结构稳定性，探索结构被破坏时运动形式所发生的质的变异. 因此，动力系统是用几何、拓扑的观点来观察事物，用分析、代数的手段来处理问题. 它既具有丰富的实际背景又扎根于深厚的数学基础.

微分方程描述的连续运动和映射迭代描述的离散运动都是动力系统研究的范畴. 我们在理解这两种不同形式的具体现实含义的同时，要看到它们之间的内在联系，即怎样将连续动力系统离散化，而又怎样将一个离散动力系统嵌入到连续的动力系统中去. 要通过研究映射迭代，探讨简单的运动机理是怎样产生复杂运动的，探讨一个运动现象的背后是什么样的映射在支配作用，揭示复杂运动到底有多么复杂，揭示那些看来杂乱无章的现象所蕴含的规律.

尽管动力系统也有漫长的发展历史，但在近半个世纪才蓬勃发展起来. 像 Sharkovsky 序、 Feigenbaum 现象、 Smale 马蹄等等，这连续不断的精彩创新使动力系统理论在短短几十年里成为了多个学科关

注的焦点，也成为数学研究的热点．国内外有关著作也以不同的风格大量涌现，如 [18]、[29]、[20]、[39]、[41]、[51]、[52]、[53]、[67]、[69] 等等，它们从不同的侧面论述了动力系统的基本理论和当时的最新 成就．在这进入新的世纪的时候，伴随着动力系统理论研究的深入开展，伴随着动力系统知识的广泛传播，也伴随着动力系统在诸多领域的应用，我们希望有一本新书，它既能高度概括动力系统知识同时又反映最近一些年动力系统的新成果，不仅使读者能在浩翰的海洋中尽快捕捉到最基本最精华的结论而且能引人入胜地将读者带到一片不毛之地让他们去开垦．

本书就是基于这样的目的来撰写的．本书在 2000 年全国数学研究生暑期学校讲义《动力系统基础》以及四川大学数学学院研究生课程教学的基础上，增添了一些新内容．一方面突出主线和重点，力求简明、精练、可读，使本书能具有较大的读者面，既能成为专门从事动力系统理论研究的学者和涉及动力系统方法的工程技术人员的参考书，又能作为研究生和本科高年级学生的教材．另一方面突出特色，在许多章节中穿插了近十多年来国内外同行取得的新成果，其中也包含了一些作者自己取得的成果．为了适当详略，书中并没有对所有的定理和结论都给出详细证明过程．然而书中指明了必要的参考文献，有的还提出了思考问题．这样做的目的在于留给读者一点空间，一点选择的空间，一点扩展的空间．

也许本书尚存一些不尽人意之处，未必完全达到写作初衷．然而，只要能向着这个目标迈进一步，做出这份艰苦努力还是值得的．但愿本书能作为作者学习和研究动力系统的多年积累奉献给大家，以求得同行间更广泛的交流，互通有无，共同促进动力系统的发展．借此机会，我要衷心感谢我的导师张芷芬教授和刘世泽教授（已故），感谢

廖山涛院士（已故）、张景中院士、杨路研究员、文兰院士、李承治教授、王铎教授等多方指导和帮助过我的老师，感谢四川大学的同仁这些年来对我的支持. 本书的出版还得到了由教育部和国家自然科学基金会主办四川大学承办的 2000 年全国数学研究生暑期学校的大力支持，在此也深表谢意.

张伟年

2001 年 11 月于四川大学

目 录

第一章　迭代与动力系统

所谓迭代，可看作同一个运算或操作的多次重复．自然数的乘法 $a \times k$，即 k 个 a 的累加，可看作加法运算或函数 $f(x) = x + a$ 的迭代．在 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换 A 的多次重复下，空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意一点 x 将生成一动态轨迹 $x, Ax, A^2x, A^3x \dots$．迭代产生了动力系统，迭代产生了复杂性．

§1.1　迭代

若 y 是 u 的函数，即 $y = f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即 $u = g(x)$，则称 y 为 x 的 *复合函数*，记为 $y = f(g(x))$ 或 $y = f \circ g(x)$．一些简单的初等函数经过复合，会变得十分复杂．同一个函数 $f(x)$ 的多次复合，$f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$，称为函数 $f(x)$ 的 *迭代*．为简便起见，记

$$f^1(x) = f(x),\ f^n(x) = f(f^{n-1}(x)).$$

特别地，记 $f^0(x) \equiv x$．

迭代是复杂的．看似简单的函数 $f(x) = \mu - x^2$ 和 $f(x) = \sin x$，其 n 次迭代的函数性质不仅十分复杂，而且当 $n \to \infty$ 时的极限行为还会出现许多意想不到的事情．非线性函数的复杂性常常通过迭代而被放大了．

迭代是普遍的．在经济生活中，如果本金 P 以利率 r 借贷 n 年，若按复利累计，其总和应为 $A_n = P(1+r)^n$．显然，A_n 是函数 $a(x) = x(1+r)$ 的迭代．在科学实验中，我们常常通过对初始状态到当前状态的记录，来分析系统运动的规律．有时，从一个状态到下一状态的变化遵从同一个规则，一旦这一规则被发现，我们就可以确定和预测系统的演变．例

如生态学中研究的昆虫种群量模型 $x_{n+1}=x_n(a-bx_n), 0\le x_n\le a/b$, 可看作函数 $f(x)=x(a-bx)$ 的迭代. X- 射线的透射、流体的渗流、生物体的生长、计算机的运行等过程中都包含了迭代现象.

在数学中, 一切递推关系都是迭代. 等差数列和等比数列当然是迭代的产物. 微分方程解的 Picard 逼近就是一个迭代过程. 考虑 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=f(t,x(t)), \\ x(t_0)=x_0. \end{cases}$$

其 Picard 序列 $\{x_n(t)\}$ 如下定义

$$\begin{cases} x_0(t):\equiv x_0, \\ x_n(t):=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x_{n-1}(s))\mathrm{d}s. \end{cases}$$

它是算子

$$\mathcal{T}x(t):=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

迭代产生的. 因此微分方程的数值解就是用迭代的方法来研究微分方程. 在分析向量场时我们常常讨论返回映射或 Poincaré 映射. 例如微分系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(t,x,y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(t,x,y), \end{cases}$$

其中 P,Q 是连续可微的且关于 t 具有周期 T. 设其关于初条件 $x(0)=\xi$, $y(0)=\eta$ 的解记为 $x(t;\xi,\eta),y(t;\xi,\eta)$. 那么, $(\xi,\eta)\mapsto(x(T,\xi,\eta),y(T,\xi,\eta))$

定义了一个连续映射 $\Pi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ ，称为 Poincaré 映射. 通过这样的方法把问题化成映射的迭代来解决. 因此，把迭代的数学原理搞清楚是十分必要的.

§1.2 初等迭代

计算函数的迭代不仅重要，而且有趣. 对一般给定的函数，我们希望计算其迭代的表达式，尤其是一般的 n 次迭代式. 例如，通过直接计算可以求得：如 $f(x)=x+b$ ，则 $f^n(x)=x+nb$ ；如 $f(x)=cx$ ，则 $f^n(x)=c^nx$ ；如 $f(x)=x^k$ ，则 $f^n(x)=x^{k^n}$. 然而，对稍微复杂一点的初等函数，我们就会感到直接计算迭代式是件非常困难的事情. 以下我们介绍两种方法.

不动点法：如果能断定一个函数 f 迭代式的基本代数形式，如线性式、线性分式、多项式等等，我们可以设置待定常数，并用函数 f 的不动点来确定这些常数. $x_0\in I$ 称为 f 的不动点如果 $f(x_0)=x_0$.

例 1 $f(x)=ax+b, a,b\in\mathbf{R},\ a\neq 1$.

首先，f 是线性的，可以肯定 f^n 也是线性的，不妨设

$$f^n(x)=a^nx+B,$$

其中 B 待定. 从 $f(x)=x$ 解出 f 的不动点 $x_0=\frac{b}{1-a}$. 由 $f(x_0)=x_0$ 必然 $f^n(x_0)=x_0$ ，这一关系表明

$$a^n\frac{b}{1-a}+B=\frac{b}{1-a},$$

从中解得 $B=\frac{1-a^n}{1-a}\cdot b$, 从而

$$f^n(x)=a^nx+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot b.$$

共轭相似法：直观地讲，如果存在可逆函数 $h(x)$，使函数 f 与 g 满足 $f=h^{-1}\circ g\circ h$，就称 f 与 g 共轭，或说相似，记为 $f\sim g$．这里函数 h 称为*桥函数*．这种共轭是一种等价关系，即满足：(1) 自反性：$f\sim f$，(2) 对称性：$f\sim g\ \Rightarrow\ g\sim f$，(3) 传递性：$f\sim\phi,\ \phi\sim g\ \Rightarrow\ f\sim g$．尤其是 $f\sim g\ \Rightarrow\ f^n\sim g^n$，即从 $f=h^{-1}\circ g\circ h$ 可导出 $f^n=h^{-1}\circ g^n\circ h$．我们常常利用这一性质，设法把一个复杂的函数迭代化成一较简单的函数迭代．

我们再考虑例 1．取 $h(x)=x+\frac{b}{a-1}$，易见 $h^{-1}(x)=x-\frac{b}{a-1}$．则

$$f(x)=h^{-1}(ah(x))=a\left(x+\frac{b}{a-1}\right)-\frac{b}{a-1}.$$

从而

$$\begin{aligned}f^n(x)&=h^{-1}(a^nh(x))=a^n\left(x+\frac{b}{a-1}\right)-\frac{b}{a-1}\\&=a^nx+\frac{a^n-1}{a-1}\cdot b.\end{aligned}$$

这同样得到了刚才的结果.

例 2 考虑有理分式

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c},\tag{1.1}$$

其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$, $ac-b\neq 0$． 记 s 是二次方程 $s^2-(a-c)s-b=0$ 的一个根，$x_0=1/(a-c-2s)$．令 $h(x)=1/(x-s)$，易见 $h^{-1}(x)=\frac{1}{x}+s$．由 s 的定义知它是 f 的一个不动点， 可以算出

$$h(f(h^{-1}(x)))=\frac{1}{f(h^{-1}(x))-s}=\frac{1+(s+c)x}{a-s}$$

上式右端记为 $g(x)$，从而建立了共轭关系 $h(f(h^{-1}(x))) = g(x)$．由 g 的简单形式可算出

$$\begin{aligned} g^n(x) &= \left(\frac{s+c}{a-s}\right)^n x + \frac{1}{a-s}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{s+c}{a-s}\right)^k \\ &= \left(\frac{s+c}{a-s}\right)^n (x-x_0) + x_0. \end{aligned}$$

于是得到了结论

$$\begin{aligned} f^n(x) &= h^{-1}(g^n(h(x))) = \left(g^n(\frac{1}{x-s})\right)^{-1} + s \\ &= s + \frac{(a-s)^n(x-s)}{((a-s)^n-(s+c)^n)x_0(x-s)+(s+c)^n}. \end{aligned}$$

类似地，利用相似关系，即 $F^n(x) = h^{-1}\circ g^n \circ h(x)$，还可以得到更多的迭代结果：

$F(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$F^n(x)$
$x+2\sqrt{x}+1$	$x+1$	$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x}+n)^2$
$\frac{x}{a+bx}$	$ax+b$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{a^n+(1+a+\ldots+a^{n-1})bx}$
$\sqrt[k]{ax^k+b}$	$ax+b$	x^k	$\sqrt[k]{a^nx^k+\frac{1-a^n}{1-a}b}$
x^2+2x	x^2	$x+1$	$(x+1)^{2^n}-1$
$\frac{x^2}{2x-1}$	x^2	$1-\frac{1}{x}$	$\frac{x^{2^n}}{x^{2^n}-(x-1)^{2^n}}$
$2x^2-1$	$2x$	$\arccos x$	$\cos 2^n(\arccos x)$
$2x\sqrt{1-x^2}$	$2x$	$\arcsin x$	$\sin 2^n(\arcsin x)$
$\frac{2x}{1-x^2}$	$2x$	$\arctan x$	$\tan 2^n(\arctan x)$
$\frac{x}{\sqrt[k]{1+ax^k}}$	$\frac{x}{1+ax}$	x^k	$\frac{x}{\sqrt[k]{1+nax^k}}$
$\frac{x}{1+2a\sqrt{x}+a^2x}$	$\frac{x}{1+ax}$	$\sqrt{x}$	$\frac{x}{(1+na\sqrt{x})^2}$

§1.3 动力系统概念

迭代并不局限于函数. 有了感性认识后我们再给出一般的定义.

定义 1 设 $f:X\to X$ 是集合 X 到自身的一个映射, 记

$$f^n(x)=f\circ f^{n-1}(x),\quad f^0(x)=x,$$

n 为正整数, 称 $f^n(x)$ 为 $f(x)$ 的 *n 次迭代*, 并称 n 为 f^n 关于 f 的*迭代指数*.

从定义可见,

$$f^0=\mathrm{id},\quad f^m\circ f^n=f^{m+n},$$

其中 id 表示恒同映射. 映射的迭代构成了一个半群. 如果 f 是拓扑空间 X 上的连续映射, 其迭代被认为是构成了一个离散半动力系统 $\{f^n:n\in\mathbf{Z}_+\}$. 如果 f 在 X 上同胚, 其迭代构成了一个离散动力系统 $\{f^n:n\in\mathbf{Z}\}$.

定义 2 一个映射 $\phi(t,x):\mathbf{R}\times X\to X$ 称为集合 X 上的一个*流*, 如果对 $\forall t_1,t_2\in\mathbf{R},x\in X$,

(i) $\phi(0,x)=x$,

(ii) $\phi(t_1+t_2,x)=\phi(t_1,\phi(t_2,x))$.

如果上述仅在 $\mathbf{R}_+$ 上定义, 则称 $\phi(t,x)$ 为一个*半流*.

定义中的集合 X, 可以是一实线段 (区间)$I=[a,b]$, 可以是高维欧氏空间上一区域, 也可以是一拓扑空间. 如果 X 是拓扑空间, 而 $\phi(t,x)$ 连续, 则称之为连续流 (或连续半流). 这时, 我们常常也称 ϕ 为 X 上一个*连续 (半) 动力系统*. 如果 X 上有 C^r 微分结构 (例如 C^r 流形), 且 $\phi(t,x)$ 是 r 次连续可微的, 则称之为 C^r 流. 若上述定义的

t, t_1, t_2 在 $\mathbf{Z}$(或 $\mathbf{Z}_+$) 中考虑，X 是拓扑空间，而 $\phi(t,x)$ 关于 x 连续，则称 ϕ 为 X 上一个 *离散 (半) 动力系统*．

设 f 为拓扑空间 X 上一个同胚，f^k 为 f 的 k 次迭代，分别称集合

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}_f(x) &= \{f^k(x):\ k\in\mathbf{Z}\}, \\ \mathrm{Orb}_f^+(x) &= \{f^k(x):\ k\in\mathbf{Z}_+\}, \\ \mathrm{Orb}_f^-(x) &= \{f^{-k}(x):\ k\in\mathbf{Z}_+\} \end{aligned}$$

为离散动力系统 f 过 $x\in X$ 的 *轨道*、*正半轨* 和 *负半轨*．显然，$\mathrm{Orb}_f(x)=\mathrm{Orb}_f^+(x)\cup\mathrm{Orb}_f^-(x)$．

如果存在自然数 p，使得 $f^p(x)=x$，则称 x 为 f 的 *周期点*．满足这一关系的最小自然数 p 称为 x 的 *周期*．这时

$$f^p(x)=x,\quad f^k(x)\neq x,\ \forall k=1,2,...,p-1,$$

直接称 x 为 *p-周期点*．特别地，当 $p=1$ 时，$f(x)=x$，称 x 为 f 的 *不动点*． $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 分别记 f 在 X 上所有周期点和不动点的集合. 显然，$\mathrm{Fix}(f)\subset\mathrm{Per}(f)$．过周期点的轨道称为 *周期轨道*，它必定是有限轨道，反之亦然.

例 3 在 $\mathbf{R}^2$ 上的线性变换 R_θ 是指一个旋转 θ 角的变换. 它显然导出一个动力系统. 从任意一点 $x\in\mathbf{R}^2$ 开始作 R_θ 的迭代产成一条轨道 $\{R_{k\theta}x:\ k\in\mathbf{Z}\}$．当 $\theta=2a\pi$, $a=\frac{p}{q}$ 是有理数时，它的轨道都是周期轨道，因为 $R_{2a\pi}^q x=x$．当 $\theta=2a\pi$, a 是无理数时，除 $x=0$ 是不动点外它没有周期轨道.

例 4 设 $x=\phi(t,x_0)$ 是常微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V(x)$ 关于初条件 $x(0)=x_0$ 的解，其中 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 而且 f 使方程满足存在唯一性. $\{\phi(t,\cdot):\mathbf{R}^n\to$

$\mathbf{R}^n : t \in \mathbf{R}\}$ 构成一个动力系统. 特别是映射 $f(x) := \phi(1, x)$ 导出一个离散动力系统. 特别是, 如果 $V(x_0) = 0$, 那么 $\phi(t, x_0) \equiv x_0, x_0$ 是 f 的不动点.

例 5 设 $\Sigma(N)$ 是由一切双边序列 $s = (..., s_1; s_0, s_1, ...)$ 构成的拓扑空间, 其中所有 $s_i \in \{1, 2, ..., N\}$. 形如 $U_n(a_n, ..., a_0, ..., a_n) := \{s \in \Sigma(N) :\ s_i = a_i,\ |i| \leq n\}$ 的集合 (称为柱集) 构成了 $\Sigma(N)$ 的一个可数拓扑基. 映射 $\sigma : (..., s_1; s_0, s_1, ...) \mapsto (..., s_1, s_0; s_1, ...)$ 在 $\Sigma(N)$ 上导出了一个动力系统. 易见, 它具有形如 $\{..., a; a, a, ...\}$ 的不动点和形如 $\{...; \underbrace{a_1, a_2, ..., a_k}, \underbrace{a_1, ..., a_k}, ...\}$ 的周期点, 其中 $a_1, a_2, ..., a_k$ 在序列中反复重复.

集合

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \in N} \overline{\{f^k(x) :\ k \geq n\}},$$

$$\alpha_f(x) = \bigcap_{n \in N} \overline{\{f^{-k}(x) :\ k \geq n\}}$$

分别称为轨道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 ω-极限集 和 α-极限集 .

$$L(f) = \cup_{x \in X} \omega_f(x) \cup \alpha_f(x)$$

称为 f 的 极限集 .

点 $x \in X$ 称为是 f 的 游荡点 , 如果存在 x 的邻域 U , 使得

$$f^k(U) \cap U = \emptyset, \quad \forall k \in Z \backslash \{0\}.$$

不是游荡点的点 x 称为 非游荡点 . 这时, 对 x 的任意邻域 U , 都有整数 $k \neq 0$, 使 $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. 非游荡点的集合记为 $\Omega(f)$.

定理 1 (i)$\omega_f(x)$, $\alpha_f(x)$, $\Omega(f)$ 都是闭集； (ii) $\mathrm{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$ ； (iii) 当 X 是紧空间时， $\omega_f(x)$, $\alpha_f(x)$ 和 $\Omega(f)$ 都非空.

证明 为了方便起见，我们只在 X 为度量空间的情形下证明这个定理. $\omega_f(x)$, $\alpha_f(x)$ 的闭性由定义直接得到. $\Omega(f)$ 的闭性是因为游荡点集 $X\backslash\Omega(f)$ 是开的. .

关于 (ii) ， $\mathrm{Per}(f) \subset L(f)$ 是显然的. 往下只须证任何 ω- 极限点 x_0 也是非游荡点. 事实上，由习题 7 结果，存在 $x \in X$ ，对 x_0 的任意邻域 U 都存在不同的正整数 k,l 使得 $f^k(x), f^l(x) \in U$ ，亦即 $x \in f^{-k}(U), x \in f^{-l}(U)$. 不妨设 $k > l$ ，从而

$$f^{-k+l}(U) \cap U \supset f^l(f^{-k}(U) \cap f^{-l}(U)) \neq \emptyset.$$

因此 $x_0 \in \Omega(f)$.

关于 (iii) ，因为 X 紧， $\omega_f(x)$, $\alpha_f(x)$ 显然非空. 由 (ii) ， $\Omega(f)$ 也非空. □

集合 $\Lambda \subset X$ 称为 f 的 不变集，如果 $f(\Lambda) = \Lambda$. 这时 $\mathrm{Orb}_f(x) \subset \Lambda$, $\forall x \in \Lambda$.

定理 2 $\mathrm{Orb}_f(x)$, $\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}(f)$, $\omega_f(x)$, $\alpha_f(x)$, $L(f)$, $\Omega(f)$ 都是 f 的不变集.

证明 为了方便起见，我们只在 X 为度量空间的情形下证明这个定理并只须对 $\omega_f(x)$, $\Omega(f)$ 证明，其余都是平凡或相似的. 由 f 和 f^{-1} 的连续性，显然 $f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$ 而且 $\omega_f(x) \subset f(\omega_f(x))$.

往证 $\Omega(f)$ 不变. 对任意 $x \in \Omega(f)$, 考虑 $f(x)$ 的一个任意邻域 U . 因为 $V := f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域，故存在整数 n 使得 $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ ，从而 $f^n(U) \cap U = f^{n+1}(V) \cap f(V) \supset f(f^n(V) \cap V) \neq \emptyset$. 因此， $f(x)$ 也是 f 的非游荡点， $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. 另一方面，由于 f 是同胚，显

然 $\Omega(f^{-1}) = \Omega(f)$．同上类似地可以证明 $f^{-1}(\Omega(f^{-1})) \subset \Omega(f^{-1})$．因此 $f^{-1}(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$．□

进一步，如果 X 上定义了距离 d，且不变集 Λ 还满足吸引性，即存在 Λ 的开邻域 $U \subset X$ 使得对 $\forall x \in U$ 当 $n \to +\infty$ 时有 $d(f^n(x), \Lambda) \to 0$，则称 Λ 为 f 的*吸引子*．

§1.4 动力系统几个性质

设 X 是紧致度量空间. 如果动力系统 $f: X \to X$ 的任意轨道都在 X 中稠密，则称 f 具有*极小性*．如果 $f: X \to X$ 有一条轨道在 X 中稠密，则称 f 具有*拓扑传递性*． $f: X \to X$ 被认为具有*拓扑混合性*，如果对任意两个非空开集 $U, V \subset X$ 都存在整数 $N > 0$, 使得

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \quad \forall n > N.$$

考虑环面 T^2 上的旋转 $f: T^2 \to T^2$，

$$f([x],[y]) = ([x+\phi],[y+\psi]).$$

当 ϕ, ψ 有理相关时 f 不具有极小性，因为它有周期点；但当 ϕ, ψ 有理无关时 f 是极小的，因为这时 f 的任意一条轨道都在 T^2 上稠密.

定理3 *以下结论等价：(i) f 是拓扑传递的；(ii) 如果 $U \subset X$ 是 f 的非空开不变集，则 U 在 X 中稠密；(iii) 如果 $U, V \subset X$ 是两个非空开集，则存在整数 n 使得 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

证明 假设 f 是拓扑传递的，则存在 $x_0 \in X$ 使得 $\mathrm{Orb}_f(x_0)$ 在 X 中稠密. 设 $U \subset X$ 是 f 的非空开不变集. 那么一定存在整数 N 使得 $f^N(x_0) \in U$．由 U 的不变性， $\mathrm{Orb}_f(x_0) \subset U$，因此 U 也在 X 中稠密. 由此推出了 (ii) 的结论.

进而，假设 (ii) 结论成立．如果 $U, V \subset X$ 是两个非空开集，显然 $\cup_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U)$ 也是非空开集，并且对 f 的作用不变．从而它在 X 中稠密．因此， $\cup_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. 这意味着 (iii) 成立．

最后，假设 (iii) 成立．令 $U_1, U_2, \ldots$ 为紧致度量空间 X 上的可数基并令 $F_j := \cup_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ 它们显然都是 f 的非空开不变集．由 (iii) 的假设，每个 F_j 都在 X 中稠密．因此 $\cap_{j=1}^{+\infty} F_j$ 是 Baire 集（第二纲集），即其补集是第一纲集．如果 $\cap_{j=1}^{+\infty} F_j = \emptyset$，其补集一定为 X．由于完备性， X 必为第二纲集，这是一个矛盾．因此可以取 $x_0 \in \cap_{j=1}^{+\infty} F_j$．自然 $x_0 \in F_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots$，即存在整数 n_j 使得 $x_0 \in f^{n_j}(U_j)$, $\forall j = 1, 2, \ldots$，亦即 $f^{-n_j}(x_0) \in U_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots$．从而 $\mathrm{Orb}_f(x_0)$ 在 X 中稠密． (i) 的结论得证． □

定理 4 *$f: X \to X$ 是拓扑混合的，则 f 是拓扑传递的．*

该定理从定理 3 的 (iii) 可简单推论出来．

特别是，如果 f 是半动力系统且有一条正半轨道在 X 中稠密，则称之具有 *单边拓扑传递性*．显然，一个动力系统是单边拓扑传递的也必定是拓扑传递的．

定理 5 *动力系统 $f: X \to X$ 是单边拓扑传递的充分必要条件为 f 是拓扑传递的并且 $\Omega(f) = X$．*

证明 设 $f: X \to X$ 是单边拓扑传递．则存在 $x_0 \in X$ 使得正半轨 $\{f^n(x_0): n \geq 0\}$ 在 X 中稠密．如果 $\Omega(f) \neq X$，即 f 有游荡点，从而存在非空开集 U, 使得

$$f^k(U) \cap U = \emptyset, \quad \forall k \in Z \backslash \{0\}.$$

由稠密性，必存在整数 $m \geq 0$ 使 $f^m(x_0) \in U$，从而 $f^{n+m}(x_0) \in f^n(U), n = 1, 2, \ldots$ 这样，正半轨 $\{f^n(x_0): n \geq 0\}$ 中至多有限个点

$x_0, f(x_0), ..., f^m(x_0)$ 在 U 内，这它在 X 中稠密矛盾．充分性得证．

为了证明必要性，考虑任意两个非空开集 U,V ．因为 f 是拓扑传递的，根据定理 3 的 (iii)，必存在整数 m 使得 $W := f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. 如果 $m \geq 0$，由 $\Omega(f) = X$，必存在整数 $n > m$ 使 $f^{-n}(W) \cap W \neq \emptyset$． 从而 $f^{-(n-m)}(U) \cap V \supset f^{-n}(W) \cap W \neq \emptyset$．这表明，总有正整数 k 使得 $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$．根据这一事实，取 X 的可数基 $\{U_j : j = 1, 2, ...\}$，则对每个 $j = 1, 2, ...$ 集合 $F_j := \cup_{k=1}^{+\infty} f^{-k}(U_j)$ 都是稠密的．显然每个 F_j 也是非空开集并且对 f 不变．类似定理 1 证明可以知道 $\cap_{j=1}+\infty F_j \neq \emptyset$，从而正半轨 $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ 在 X 中稠密． □

§1.5 迭代的基本问题

关于映射迭代的研究，至少可追溯到一百多年以前 Schröder[44]、Abel[1]、Babbage[12] 等数学家的工作．迭代运算比一般代数运算复杂得多，尤其关于非线性的迭代，因此其研究工作十分艰难曲折．迭代又普遍存在于自然界，已经成为近代物理学、化学、天文学、力学、工程等学科关注的焦点．在这样的形势下，动力系统理论得到了迅猛的发展，尤其是近几十年来大量的重大发现如关于周期性的 Sharkovsky 序、关于分岔的 Feigenbaum 现象、关于运动复杂性的 Smale 马蹄等等不断涌现．动力系统的新成就促进了微分方程和迭代函数方程的发展．

关于映射 f 的迭代，人们自然关心 n 次迭代 $f^n(x)$ 的计算或估计，这决定了系统轨道的定位．在本章第 2 节可以看出，这样的计算对一维映射都十分困难．对多维映射即使用计算机也是非常复杂甚至不可能的．进而，人们关心迭代序列 $\{f^n(x)\}$ 的极限收敛性，从而研究动力系统运动的长期行为．这就是轨道 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$

的极限集. 人们关心各种各样极限集的拓扑结构.

关于映射 f 的迭代, 人们也关心它的 $1/n$ 次迭代, 因为它可以弥补轨道 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$ 的中间环节, 修补失去的数据. 这就要求确定映射 ϕ 使之第 n 次迭代就是映射 f , 亦即求解迭代函数方程

$$g^n(x) = f(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.2}$$

这里 g 称为 f 的一个 n 次迭代根. 人们经常要求这样的"弥补"或"修补"是"天衣无缝"的, 因此, 常常要求 g 与 f 具有同样的连续性、光滑性、解析性、对称性等等, 这也造成了数学上的难度.

本章例 4 轻易从一个连续的流诱导出了一个离散动力系统. 然而, 将映射 f 的离散动力系统嵌入流却没那么容易. f 嵌入流的问题就相当于要找出一个 X 上的连续流 $\phi(t, x)$, 甚至是微分方程的解, 使得

$$f = \phi(1, x).$$

这时显然 $f^n(x) = \phi(n, x)$. 嵌入流就是要把离散的轨道连起来, 把 f 的迭代指数推广到实数.

此外, 人们还关心稳定性问题, 包括轨道 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$ 对初始点的依赖性、迭代根 g 和嵌入的流 ϕ 对已知映射 f 的依赖性、甚至整个系统轨道拓扑结构对 f 的依赖性. 事实上, 在实际问题中, 数据难免有偏差, 系统可能受其它参数的影响.

进而, 类似 (1.2) 包含映射迭代的其他方程也是关于迭代的基本问题之一.

[习题 1] 一个容积为 0.5 L 的杯子盛满刚沏好的茶, 通常"喝完"的习惯是喝掉 $\frac{2}{3}$ 后再加满开水. 加 10 次水后认为是喝淡了. 如果能测定此时茶质和水的比例为 a , 简称茶水比, 问最初的茶水比是多少?

[习题 2] $f(x)=x+3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+1$，计算 $f^n(x)$ 的表达式.

[习题 3] $f(x)=\arccos(\sin x)$，计算 $f^n(x)$ 的表达式.

[习题 4] 设 $f(x)=\dfrac{x\cos\theta-\sin\theta}{x\sin\theta+\cos\theta}$. 证明 $f^n(x)=\dfrac{x\cos n\theta-\sin n\theta}{x\sin n\theta+\cos n\theta}$.

[习题 5] 设 f,ϕ,ψ 都是定义在区间 I 上且可以迭代的函数，如果 ϕ,ψ 都递增，而且对一切 $x\in I$ 有 $\phi(x)\le f(x)\le\psi(x)$，证明 $\phi^n(x)\le f^n(x)\le\psi^n(x)$.

[习题 6] $f(x)=\sin x$, $f^n(x)=\underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n}x$. 证明

$$\frac{x}{\sqrt{1+3nx^2}}<f^n(x)<\frac{x}{\sqrt{1+nx^2/5}}.$$

[习题 7] 在度量空间中对任意 $x_0\in\omega_f(x)$ 或 $x_0\in\alpha_f(x)$，存在序列 $n_i\to+\infty$，使 $\lim_{i\to\infty}f^{n_i}(x)=x_0$ 或 $\lim_{i\to\infty}f^{-n_i}(x)=x_0$.

[习题 8] 设 X 是紧致度量空间， $f:X\to X$ 是连续映射， $x\in X$. 证明 $\omega_f(x)$ 是不变集.

[习题 9] 设 X 是紧致度量空间， $f:X\to X$ 是同胚. 证明 $x\in\Omega(f)$ 当且仅当对任意 x 的邻域 U 和任意正整数 N 都存在 $n>N$ 使得 $f^n(U)\cap U\neq\emptyset$.

[习题 10] 证明例 5 的动力系统是拓扑混合的但不是极小的.

第二章　周期轨道

关于周期轨道的问题，我们将主要考虑 $X=\mathbf{R}$ 甚至区间 $X=I$ 上的离散情形．动力系统的一条轨道是周期轨道的充分必要条件是它为有限轨道．自然，p- 周期轨道中只有 p 个不同的点，而且所有点都是 p- 周期点．然而，在研究函数 $f:I\to I$ 的迭代时，我们常常会遇到 f 不是同胚的情形．这时 f 生成的离散半动力系统可能出现非周期的有限轨道，例如某个点 $x\notin \mathrm{Per}(f)$ 但存在正整数 m 使 $f^m(x)\in \mathrm{Per}(f)$，即 x 被迭代到第 m 步后方呈现出周期性，我们称这样的 x 和它轨道为*终于周期点*和*终于周期轨道*．

定理 1　*x_0 为 f 的 p- 周期点．如果正整数 q 满足 $(p,q)=d$，则 x_0 是 f^q 的 m- 周期点，$m=p/d$．特别地，当 q 与 p 互素时，x_0 也是 f^q 的 p- 周期点．反过来，如果 x_0 既是为 f 的 p- 周期点又是 f^q 的 m- 周期点，那么 $p=m(p,q)$．*

这个结果的证明是简单的．事实上，设 $p=dp_1$，$q=dq_1$．那么 p_1,q_1 互素．显然 $f^{qp_1}(x_0)=f^{dp_1q_1}(x_0)=f^{pq_1}(x_0)=x_0$，可以肯定 x_0 是 f^q 的周期点而且其最小周期 m 一定整除 p_1．注意到 $f^{qm}(x_0)=x_0$ 意味着 $p|qm$，从而 $p_1|q_1m$．由于 p_1,q_1 互素，故 $p_1|m$，从而 $m=p_1$．定理的另一半也同理可证．

§2.1　Li-Yorke 定理

为讨论方便，我们引入 f- 覆盖的概念．设 $f:I\to I$ 连续，$I\subset\mathbf{R}$ 是一个区间．如果闭子区间 $I_1\subset I$ 和 $I_2\subset I$ 满足 $f(I_1)\supset I_2$，即 $I_2\subset[\min_{x\in I_1}f(x),\ \max_{x\in I_1}f(x)]$，则称 I_1 f- 覆盖 I_2，并记为 $I_1\ f:\Rightarrow I_2$，

或直接简记为 $I_1 \Rightarrow I_2$.

定理 2 f 和 I 假设同上, 如果 $I_1 \subset I$ 为闭子区间, 使得 $I_1 \Rightarrow I_1$, 则 f 在 I_1 上必有不动点. 如果 $I_1, I_2, ..., I_n$ 为 I 的闭子区间, 使得

$$I_1 \Rightarrow I_2 \Rightarrow ... \Rightarrow I_{n-1} \Rightarrow I_n \Rightarrow I_1,$$

则存在 $x_0 \in I_1$, 使 $f^n(x_0) = x_0$, 且 $f^{k-1}(x_0) \in I_k,\ k = 1, 2, ..., n$.

证明 记 $I_1 = [A, B]$. 如果 $I_1 \Rightarrow I_1$, 则存在子区间 $J = [\alpha, \beta] \subset I_1$ 使得 $f(J) = I_1$, 从而有两种情形:

$$f(\alpha) = A \leq \alpha, \quad f(\beta) = B \geq \beta,$$

或者

$$f(\alpha) = B > \alpha, \quad f(\beta) = A < \beta.$$

因此函数 $f(x) - x$ 在 $x = \alpha$ 处 ≤ 0 而在 $x = \beta$ 处 ≥ 0 , 或者函数 $f(x) - x$ 在 $x = \alpha$ 处 > 0 而在 $x = \beta$ 处 < 0 . 由连续函数的介值定理可推出第一个结论.

关于第二个结论, 由于 $f(I_k) \supset I_{k+1},\ k = 1, ..., n$, 其中 I_{n+1} 记 I_1 , 由连续性, 必存在闭子区间 $J_k \subset I_k,\ k = 1, ..., n$, 使

$$f(J_k) = J_{k+1} \subset I_{k+1},\ k = 1, 2, ..., n-1, \quad f(J_n) = I_1.$$

因此 $f^n(J_1) \supset J_1$, 从而, 由第一个结论可推出第二个结论. □

定理 3 (Li-Yorke定理) 区间 I 上的连续自映射 f 如果存在 3- 周期点, 则对任意正整数 n , f 具有 n- 周期点.

证明 设 $x_0 < x_1 < x_2$ 是 f 的一个 3- 周期轨道, 那么 $f(x_1) = x_0$ 或 $f(x_1) = x_2$ 必有一个成立. 不妨只考虑第一种情形, 如图 1, 这时必有

$$f(x_1) = x_0, \quad f(x_0) = x_2, \quad f(x_2) = x_1. \tag{2.1}$$



图 1　K_1 与 K_2 的关系

令 $K_1=[x_0,x_1]$, $K_2=[x_1,x_2]$，显然有 f- 覆盖关系 $K_1\Rightarrow K_1\cup K_2$，从而

$$K_1\Rightarrow K_1,\quad K_1\Rightarrow K_2,\quad K_2\Rightarrow K_1.$$

对任意正整数 $n\neq 3$，令

$$I_1=I_2=...=I_{n-1}=K_1,\quad I_n=K_2,$$

易见闭子区间 $I_1,I_2,...,I_n$ 满足定理 2 的条件, 从而存在 $y_0\in I_1=K_1$，使 $f^n(y_0)=y_0$，且

$$f^k(y_0)\in K_1,\quad k=0,1,2,...,n-2 \tag{2.2}$$

$$f^{n-1}(y_0)\in K_2. \tag{2.3}$$

进一步，为证明 y_0 是 f 的 n- 周期点，只需证 $y_0,f(y_0),...,f^{n-1}(y_0)$ 两两不同. 否则 y_0 周期小于 n，即 $f^{n-1}(y_0)$ 是 $y_0,f(y_0),...,f^{n-2}(y_0)$ 中的一个，因而

$$f^{n-1}(y_0)\in K_1. \tag{2.4}$$

由 (2.3) 和 (2.4)， $f^{n-1}(y_0)\in K_1\cap K_2=\{x_1\}$，因此

$$y_0=f^n(y_0)=f(f^{n-1}(y_0))=f(x_1)=x_0,$$

这表明 n 是 3 的整倍数. 由于预先取 $n\neq 3$，故 $n\geq 6$, $n-2\geq 4$，从而由 (2.1) 和 (2.2)，

$$x_2=f(x_0)=f(y_0)\in K_1=[x_0,x_1],$$

这显然与 $x_1<x_2$ 的假设矛盾. □

§2.2 Sharkovsky 定理

前苏联数学家 A.N.Sharkovsky 在 1964 年对自然数 重新作了一个排序：

$$\begin{aligned}
&3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \ldots \lhd 2n+1 \lhd 2n+3 \lhd \ldots \\
&\lhd 2\times 3 \lhd 2\times 5 \lhd \ldots \lhd 2\times(2n+1) \lhd 2\times(2n+3) \lhd \ldots \\
&\lhd 2^2\times 3 \lhd 2^2\times 5 \lhd \ldots \lhd 2^2\times(2n+1) \lhd 2^2\times(2n+3) \lhd \ldots \\
&\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\lhd 2^m\times 3 \lhd 2^m\times 5 \lhd \ldots \lhd 2^m\times(2n+1) \lhd 2^m\times(2n+3) \lhd \\
&\ldots \lhd 2^l \lhd 2^{l-1} \lhd \ldots \lhd 16 \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1.
\end{aligned}$$

我们称之为 Sharkovsky序 或 S序．这个序给出了比定理 3 更广泛的结果，全面揭示了一维映射迭代 周期性的规律.

定理 4 (Sharkovsky定理) *设 f 为区间 I 上的连续自映射，且有 m- 周期点，如果 $m \lhd n$，则 f 必有 n- 周期点.*

证明 Sharkovsky 定理的关键是证明以下引理.

引理 (奇周期轨序关系) *f 若有非不动点的奇数 $(2n+1)$- 周期轨道 $\{x_k = f^k(x_0) : k = 0, 1, ..., 2n\}$ 而没有 $(2n-1)$- 周期轨道，并设 x_0 为诸 x_k 由小到大排列时正中间的一个（即第 $n+1$ 个），则该 轨道必有下列之一的排序*

(i) $x_{2n} < x_{2n-2} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1}$,

(ii) $x_{2n-1} < x_{2n-3} < \cdots < x_3 < x_1 < x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n}$.

证明 为叙述方便，把诸 x_k 由小到大重新命 名为 $z_1 < z_2 < \ldots < z_{2n+1}$，简称为基点. 显然，$f(z_1) > z_1$，$f(z_{2n+1}) < z_{2n+1}$，故必有一对相邻基点 z_m 和 z_{m+1} 使得

$$f(z_m) \geq z_{m+1}, \quad f(z_{m+1}) \leq z_m. \tag{2.5}$$

记 $\alpha_0 = z_m$，$\beta_0 = z_{m+1}$，并记 U_0 是区间 $[\alpha_0, \beta_0]$ 上全体基点之集合. 进而归纳地把 f 在 U_{k-1} 上的最小值和最大值分别记为 α_k 和 β_k，

并记 U_k 是区间 $[\alpha_k, \beta_k$ 上全体基点之集合. 可以证明:
(1) $U_k \subset U_{k+1}$, $k = 0, 1, ...$
(2) 若 U_k 中元素少于 $2n+1$ 个, 则 U_{k+1} 比 U_k 至少多一个元素.
换言之, $\{U_k\}$ 一个比一个大, 直到包含全部基点. 事实上, 对 (1) 显然 $U_0 \subset U_1$. 若 $U_{k-1} \subset k$, 由 α_k 和 β_k 定义, $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k < \beta_k \leq \beta_{k+1}$, 故 $U_k \subset U_{k+1}$. 对 (2) , 如果不然, f 仅把 U_k 中的点都变为 U_k 中的点, 从而在 f 作用下 U_k 的点永远不能走遍所有基点, 与周期轨道性质矛盾.

对于这个奇周期轨道来说, $[z_1, z_m]$ 与 $[z_{m+1}, z_{2n+1}]$ 中基点的个数是不同的, 不妨设 $[z_1, z_m]$ 中较多. 类似证明 (2) 的道理, 在 f 作用下 $[z_1, z_m]$ 中必有基点分别被映入 $[z_1, z_m]$ 和 $[z_{m+1}, z_{2n+1}]$, 因而存在 $z_l, z_{l+1} \in [z_1, z_m]$ 使 $f(z_l), f(z_{l+1})$ 中较大者 $\geq z_{m+1}$ 而较小者 $\leq z_m$, 亦即 $[z_l, z_{l+1}] \Rightarrow [z_m, z_{m+1}]$. 另一方面, 由上性质 (1) 和 (2) , 不妨令 s 是使 U_k 包含 $\{z_l, z_{l+1}\}$ 的最小整数. 显然 $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}] \not\supset [z_l, z_{l+1}]$, 但在 f 作用下 $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}] \Rightarrow [z_l, z_{l+1}]$. 若记: $J_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $k = 0, 1, ..., s-1$, $J_s = [z_l, z_{l+1}]$, 则有

$$J_0 \Rightarrow J_0 \Rightarrow J_1 \Rightarrow J_2 \Rightarrow ... \Rightarrow J_s \Rightarrow J_0 \tag{2.6}$$

的覆盖关系并且 $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset ... \subset J_{s-1} \not\supset J_s$.

往下指出 $s = 2n-1$. 首先, 由性质 (2) , J_{k+1} 中的基点至少比 J_k 中的基点多一个, $k = 0, 1, ..., s-2$, 而 J_s 中至少一个基点不在 J_{s-1} 中. 注意到 J_0 中正好二个基点, 故 $J_0, J_1, ..., J_s$ 中不同基点总数 $\geq s+2$. 因此, $s+2 \leq 2n+1$, 即 $s \leq 2n-1$. 进而, 如果 $s < 2n-1$, 由 (2.6) 及定理 2 , $\exists x^* \in J_0$ 使得 $f^{2n-1}(x^*) = x^*$, 且当 $0 \leq k \leq 2n-1-s$ 时 $f^k(x^*) \in J_0$ 而当 $2n-1-s < k < 2n-1$

时 $f^k(x^*) \in J_{k-2n+s+2}$. 由于 I_s 与其它 I_k 无公共内点， x^* 又不可能是 I_0 的端点，所以 $f^{2n-2}(x^*) \in \operatorname{int}(I_s)$ ，从而 $f^{2n-2}(x^*)$ 不同于 $x^*, f(x^*), ..., f^{2n-3}(x^*)$ 中任何一个，即 x^* 是 f 的 $(2n-1)$- 周期点，这与引理假设矛盾． $s = 2n-1$ 的事实表明： J_{k+1} 中有且仅有一个基点不属于 J_k ， $k = 0, 1, ..., s-1$.

最后再证明： f 总把 J_k 的一个端点 α_k（或 β_k ）映为另一个端点 β_k（或 α_k ）同时又使 α_k（或 β_k ）介于 β_k（或 α_k ）与 $f(\beta_k)$（或 $f(\alpha_k)$ ）之间．这里 $k = 0, 1, ..., 2n-2$ ．当 $k = 0$ 时显然．若命题对小于或等于某个 $k \leq 2n-3$ 的情形都为真，记 $J_{k-1} = [\alpha, \beta]$ ．按归纳假设不妨令 $f(\alpha) = \beta$ 且 $f(\beta) < \alpha < \beta$ ．因此 $I_k = [f(\beta), \beta]$ ．再次使用归纳假设知， $f(\beta) < \beta < f^2(\beta)$ 且 $I_{k+1} = [f(\beta), f^2(\beta)]$ ．这时要证 $k+1$ 情形下的命题，只要证明 $f^3(\beta) < f(\beta)$ ．如果情况相反，则 $f(\beta) < f^2(\beta) < f^3(\beta)$ ，从而必有覆盖关系

$$[\beta, f^2(\beta)] \Rightarrow [\beta, f^2(\beta)] \Rightarrow [f(\beta), \alpha] \Rightarrow [\beta, f^2(\beta)],$$

类似 (2.6) 或定理 3 的覆盖关系，这也蕴含 f 有 $(2n-1)$- 周期点，故与引理假设矛盾．引理得证． □

Sharkovsky定理证明 将引理中以 x_0, x_1 为端点的闭区间记为 I_1 ，即 $I_1 = [x_0; x_1]$ ．同理记 $I_2 = [x_0; x_2]$, $I_3 = [x_1; x_3], ...,$ $I_{2n-1} = [x_{2n-3}; x_{2n-1}]$, $I_{2n} = [x_{2n-2}; x_{2n}]$ ． 上述引理给出了覆盖关系：

$$\begin{aligned}
&I_1 \Rightarrow I_1; \\
&I_k \Rightarrow I_{k+1},\ k = 1, 2, ..., 2n-1; \\
&I_{2n} \Rightarrow I_i,\ i = 2n-1, 2n-3, ..., 5, 3, 1.
\end{aligned}$$

利用定理 2 不难证明

推论 1 若 f 有 $(2n+1)$- 周期轨道 $(n \geq 1)$，则对任意正整数 $k > 2n+1$， f 必有 k- 周期轨道.

推论 2 若 f 有 $(2n+1)$- 周期轨道 $(n \geq 1)$，则对任意正整数 k， f 必有 $2k$- 周期轨道.

综合定理 3、推论 1 和 2、以及往下习题 3 的结论可知, Sharkovsky 定理只剩下最后一种情形需要证明: $m = 2^k p$, $k \geq 1$, 且 $p > 1$ 为奇数. 对于满足 $m \triangleleft n$ 的 n 必可表示成 $2^t q$，其中 q 是奇数. 特别是, 当 $q = 1$ 时 t 可以是任意非负整数; 当 $1 < q \leq p$ 时 t 可以是 $> k$ 的任意整数; 当 $q > p$ 时 t 是 $\geq k$ 的任意整数. 令 $\phi(x) = f^{2^k}(x)$，由定理 1，它有 p- 周期轨道. 根据推论 2，对任一非负整数 t， ϕ 必有 2^t- 周期轨道. 再由定理 1 及习题 3 的结论知, f 有 2^t- 周期轨道, 即 $q = 1$ 的情形得证. 进而考虑 $q > 1$ 的情形, 此时 $n = 2^t q$ 且 $t = k + s$, $s \geq 0$. 显然 $p \triangleleft 2^s q$. 由推论 1 和 2， ϕ 有 $2^s q$- 周期点 x^*. 注意到 $2^k | n$，再由定理 1 知, x^* 是 f 的 $2^k \cdot 2^s q$- 周期点, 亦即 n- 周期点. Sharkovsky 定理得证. □

人们对 Sharkovsky 定理给出了很多种证明方法. 另一种具有代表性的证明参见 [67].

§2.3 周期性推广

周期点具有一个好的性质, 就是映射的有限次作用后要返回原处. 如果在映射的任意多次作用后仍不能返回原处但可以任意接近原处, 具体对 $x_0 \in I$ 而言, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 都存在自然数 n 使得 $|f^n(x_0) - x_0| < \epsilon$，则称 x_0 为 f 的 *回归点*. 一个等价的定义是, x_0 为 f 的一个回归点当且仅当正半轨 $\mathrm{Orb}_f^+(x_0)$ 中存在一个子序列收敛于 x_0. 我们用 $\mathrm{Rec}(f)$ 记 f 所有回归点的集合. 显然, $\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f)$.

10...62

回归点虽不具有周期性，但仍然具有好的性质.

定理 5 设 f 为区间 I 上的连续自映射， n 为任意自然数. 则

(i) $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Per}(f^n)$, $\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}(f^n)$.

(ii) $\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f) \subset \overline{\mathrm{Per}}(t) \subset \Omega(f)$

证明 结论 (i) 关于周期点集的证明是简单的. 关于回归点集，由定义显然有 $\mathrm{Rec}(f) \supset \mathrm{Rec}(f^n)$. 进而，对任意 $x_0 \in \mathrm{Rec}(f)$ ，设子序列 $f^{k_1}(x_0), f^{k_2}(x_0), f^{k_3}(x_0), \ldots$ 趋于 x_0 . 注意到，

$$k_i \equiv r_i(\mathrm{mod} n), \quad 0 \leq r_i < n, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

由抽屉原则，必存在序列 $\{k_i\}$ 中的子序列，不妨就记为 $\{k_i\}$ 本身，其元素都具有同样的余数 r, $0 \leq r < n$. 兹考虑 x_0 的任意小邻域 U_1 . 显然存在某个 k_{i_1} 使得 $f^{k_{i_1}}(x_0) \in U_1$. 由连续性，可以选取 x_0 更小的邻域 $U_2 \subset U_1$ 使得 $f^{i_1}(U_2) \subset U_1$. 同理对 U_2 重复对 U_1 的步骤，如此下去，可以得到 x_0 的邻域 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ 及正整数 $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n}$ ，满足 $f^{k_{i_i}}(x_0) \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 、 $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n$ 以及 $f^{k_{i_i}}(U_{i+1}) \subset U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. 从而，

$$f^s(x_0) \in U_1, \tag{2.8}$$

其中 $s := k_{i_1} + k_{i_2} + \ldots + k_{i_n} \equiv 0(\mathrm{mod} n) = s_1 n$ ，这里 s_1 是某个正整数. 因此 $(f^n)^{s_1}(x_0) \in U_1$. 这样就证得了 $\mathrm{Orb}^+_{f^n}(x_0)$ 中存在一个子序列收敛于 x_0 . 因此 $x_0 \in \mathrm{Rec}(f^n)$.

为了证明 (ii) ，只需要证明

$$\mathrm{Rec}(f) \subset \overline{\mathrm{Per}}(f). \tag{2.9}$$

而 $\Omega(f)$ 是闭集，故 $\overline{\mathrm{Per}}(f) \subset \Omega(f)$ 显然.

为了证明 (2.9), 我们用反证法. 假设存在 x_0 的小邻域, 例如

$$J = \{x \in I : |x - x_0| < \epsilon\},$$

其中不含周期点. 这里 $\epsilon > 0$ 是一个充分小的数而 J 显然是 I 上一个子区间. 由于区间 J 上不含周期点, 不难证明对任意整数 $n > 0$ 函数 f^n 必满足 $f^n(x) > x, \forall x \in J$ 或者 $f^n(x) < x, \forall x \in J$. 进而不难证得

$$f^n(x) > x \tag{2.10}$$

如果 $x \in J$ 且 $f^n(x) \in J$, 或者

$$f^n(x) < x \tag{2.11}$$

如果 $x \in J$ 且 $f^n(x) \in J$. 我们不妨假设是第一种情况. 由于 x_0 是回归点, 必存在整数 $n_1 > 0$ 使得 $f^{n_1}(x_0) \in J$. 按 (2.10) , 必有 $f^{n_1}(x_0) > x_0$. 令

$$\delta := \min\{|f^1(x_0) - x_0|, ..., |f^{n_1}(x_0) - x_0|\}.$$

显然 $0 < \delta < \epsilon$, 这是因为 $f^{n_1}(x_0) \in J$ 而且 x_0 不是周期点. 再用回归点的定义, 必存在整数 $n_2 > n_1 > 0$ 使得 $|f^{n_2}(x_0) - x_0| < \delta$. 由 (2.10) ,

$$x_0 < f^{n_2}(x_0) < f^{n_1}(x_0). \tag{2.12}$$

令 $n_0 = n_2 - n_1$. (2.12) 表明存在一点 $y := f^{n_1}(x_0) \in J$ 满足 $f^{n_0}(y) \in J$ 且 $f^{n_0}(y) < y$. 这与 (2.10) 矛盾. 定理得证. □

该定理事实上证明了 $\overline{\mathrm{Rec}}(f) = \overline{\mathrm{Per}}(f)$. 关于这些集合之间的关系还有如下重要结果, 其证明可参阅 [58] .

定理 6 设 f 为区间 I 上的连续自映射.

(i) 如果 f 有一个 3- 周期点，则 $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Rec}(f)$ 都不是闭集.

(ii) 如果 $\mathrm{Per}(f)$ 或 $\mathrm{Rec}(f)$ 是闭集，则 f 只有 2 的方幂形式的周期.

定理 7 设 f 为区间 I 上的连续自映射.

(i) 对任意 $x \in \Omega(f)$ 和任意整数 $n>0$，在 x 和 $f^n(x)$ 之间必有 f 的周期点.

(ii) $\Omega(f|_{\Omega(f)}) = \overline{\mathrm{Per}}(f)$.

§2.4 圆周自映射

有了实直线 $\mathbf{R}$ 上映射周期点的结果，我们还可以进一步讨论另一类一维动力系统 — 圆周 S^1 上连续自映射的相关问题.

我们的基本做法是在复平面上考虑 $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. 利用覆迭映射 $E : \mathbf{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ 将连续映射 $f : S^1 \to S^1$ 提升到 $\mathbf{R}$ 上去. 映射 $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 称为 f 的 *提升* 如果它满足 $E \circ F = f \circ E$. 易见，如果 $F, G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 $f, g : S^1 \to S^1$ 的提升，则 $G \circ F$ 是 $g \circ f$ 的提升；对任意整数 k 映射 $F(x) + k$ 也是 f 的提升，反之 f 的任意提升都可以表示成这种形式； $F(x+1) - F(x) = j$ 为一个整数常数， j 由 f 唯一确定而不依赖于 F 具体形式的选择. 这个常数 j 称为 f 的 *映射度*，记为 $\deg(f)$. 可以证明：

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f),$$
$$\deg(\mathbf{id}) = 1.$$

尤其是当 $f : S^1 \to S^1$ 是同胚时 $\deg(f) = \deg(f^{-1}) = \pm 1$. 当取值 $+1$ 时称 f 为保向同胚，当取值 -1 时称 f 为反向同胚.

对于保向自同胚 $f: S^1 \to S^1$ 及其任意提升 F，可以证明：极限

$$\rho(F) := \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$$

存在且不依赖于 x 的选取；对任意整数 k， $\rho(F+k) = \rho(F) + k$. 因此我们把 $\rho(F)\,(\mathrm{mod}\mathbf{Z})$ 称为 f 的 *旋转数*，记为 $\rho(f)$. 旋转数是保向拓扑共轭的不变量.

定理 8 *保向自同胚 $f: S^1 \to S^1$ 有周期点的充分必要条件是 f 的旋转度为有理数，而且 $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f)$ 如果非空.*

证明 为证明充分性，设 $\xi_0 \in S^1$ 是 f 的 k- 周期点. 任取定 f 的提升 F 和 $x_0 \in \mathbf{R}$ 使 $E(x_0) = \xi_0$. 易见存在整数 l 使得 $F^k(x) = x + l$. 归纳地， $F^{nk}(x) = x + nl$. 从而

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{nk}(x)-x}{nk} = \frac{l}{k}.$$

为证明必要性，设

$$\rho(F) = \frac{l}{k}(\mathrm{mod}\,\mathbf{Z}).$$

不难证明 $\rho(F^n) = n\rho(F),\ \forall n \in \mathbf{Z}$. 因此 $\rho(f^k) = k\rho(f) = l(\mathrm{mod}\,\mathbf{Z})$ 是整数. 如果 $\mathrm{Fix}(f^k) = \emptyset$ ，取 f^k 的提升 G . 则存在整数 p 使得 $p < G(x) - x < p + 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$. 令

$$\alpha := \inf_{\mathbf{R}}(G - \mathbf{id}), \quad \beta := \sup_{\mathbf{R}}(G - \mathbf{id}).$$

由 $G - \mathbf{id}$ 的周期性知

$$p < \alpha \le G(x) - x \le \beta < p + 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

从而

$$\alpha \le G^i(x) - G^{i-1}(x) \le \beta. \tag{2.13}$$

在 (2.13) 中令 $i = 1, 2, ..., n$，将得到的结果相加得 $n\alpha \le G^n(x) - x \le n\beta$. 从而 $p < \alpha \le \rho(G) \le \beta < p+1$，即 $\rho(G)$ 不可能是整数. 这个矛盾表明存在 $\xi_0 \in S^1$ 使得 $f^k(\xi_0) = \xi_0$.

为了证明定理的最后一个结论, 设 f 有 k- 周期点. 由刚已证明的结果知, 存在与 k 互素的整数 l 使得 $\rho(f) = l/k (\bmod \mathbf{Z})$，从而 f 的任何周期点的周期都是 k. 这表明 $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Fix}(f^k)$ 是闭集. 为证 $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f)$，只需证明 $S^1 \backslash \mathrm{Per}(f)$ 上只有游荡点. 注意到 $S^1 \backslash \mathrm{Per}(f)$ 是开集且由开区间并成. 不妨设 (s,t) 是这样的任意一个开区间. 显然 $s, t \in \mathrm{Per}(f)$，从而

$$f^i((s,t)) \cap (s,t) = \emptyset, \quad i = 1, 2, ..., k-1,$$
$$f^k((s,t)) = (s,t),$$

并且对任意 $x \in (s,t)$ 或者 $f^k(x) > x$ 或者 $f^k(x) < x$，这里 $<$ 表示由圆周的定向在 (s,t) 上诱导的序关系. 不妨考虑 $f^k(x) > x$ 的情形. 由于 f 保向, 易见 $... < f^{-2k}(x) < f^{-k}(x) < x < f^k(x) < f^{2k}(x) < ...$ 并且

$$\lim_{i\to+\infty} f^{-ik}(x) = s, \quad \lim_{i\to+\infty} f^{ik}(x) = t.$$

这表明 (s,t) 中的点都是游荡点. □

著名的 Denjoy 定理指出: 如果保向自同胚 $f: S^1 \to S^1$ 的旋转度为无理数, f 的微商是有界变差的且不取 0 值, 则 f 是*遍历*(ergodic)的, 即 $\Omega(f) = S^1$.

[习题 1] 证明定理 1 的后一部分.

[习题 2] 证明推论 1 和推论 2 .

[习题 3] 设 f 是有界闭区间 I 上的连续自映射. 证明: (1) 如果 f 有 4- 周期点则也有 2- 周期点; (2) 如果 f 有 2^n- 周期点, 其中 n 为某个正整数, 则 f 也有 2^{n-1}- 周期点.

[习题 4] 构造一个区间 $I=[0,1]$ 上的连续自映射 f 使它具有一切自然数的周期.

[习题 5] 给出关于 (2.10) 和 (2.11) 结论的详细证明.

[习题 6] 考虑区间 $I=[0,1]$ 上的分划 $I=\{0\}\cup(\cup_{i=1}^{+\infty}I_i)$, 其中 $I_i=\left[\frac{1}{3^i},\frac{1}{3^{i-1}}\right]$, $i=1,2,\cdots$. 定义 $st_1:I_1\to I$ 为 $st_1(x)=\left(-\frac{7}{3}x+\frac{14}{9}\right)$ (当 $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 时); $=x-\frac{2}{3}$ (当 $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ 时) . 进而定义 $st_i:I_i\to I$ 为

$$st_i(x)=\frac{1}{3}st_{i-1}(3x)+\frac{2}{3},\quad i=2,3,\ldots$$

最后定义 $st:I\to I$ 为 $st(x)=st_i(x)$ (当 $x\in I_i$ 时); $=1$ (当 $x=0$ 时) . 我们称 st 为 Stefan 映射. 试证明: (i) st 有且仅有 2 的方幂形式的周期; (ii) $\mathrm{Per}(st)$ 不是闭集; (iii) $\overline{\mathrm{Per}(st)}\backslash\mathrm{Per}(st)$ 是 Cantor 集.

第三章　双曲结构

设 f 为 $C^r(r \geq 1)$ Banach 流形 X 上的 C^r 动力系统，$f(x_0) = x_0$. 不动点 x_0 称为 双曲的, 若其切映射 $A = Df(x_0) : T_{x_0}X \to T_{x_0}X$ 是可逆线性映射且具有不变的直和分解，即

$$T_{x_0}X = E^s \oplus E^u, \quad AE^s = E^s,\ AE^u = E^u,$$

且满足扩张性和收缩性，即对 $\forall k \in \mathbf{Z}_+$

$$\begin{aligned} \|A^k x\| &\leq c\lambda^k\|x\|, \qquad \forall x \in E^s, \\ \|A^{-k} x\| &\leq c\lambda^k\|x\|, \qquad \forall x \in E^u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ 为常数.

显然，一维映射 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 在不动点 x_0 处是双曲的当且仅当 f 导数的绝对值 $|f'(x_0)| \neq 0,\ 1$. 易见，当 $|f'(x_0)| < 1$（或 > 1 ）时在 f 迭代的作用下 x_0 将吸引（或排斥）它附近的点. 这时 x_0 也称为 稳定 的(或 不稳定 的)不动点. 对一般的周期点也有类似的稳定性.

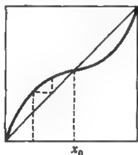


图 2　稳定不动点 x_0

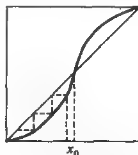


图 3　不稳定不动点 x_0

不动点只是不变集的最简单情况，我们完全可以类似地定义 双曲不变集 的概念 [67] .

§3.1 Hartman 线性化

一般来说，拓扑空间 X 上的同胚 f 和拓扑空间 Y 上的同胚 g 称为是 *拓扑共轭* 的，简记为 $f \sim g$ ，如果存在同胚 $h: X \to Y$ ，使得

$$h \circ f = g \circ h.$$

这种关系在第一章关于函数迭代式的计算法中被用到过. 拓扑共轭是一种等价关系，它把 f 的轨道变成 g 的轨道，即

$$h(\mathrm{Orb}_f(x)) = \mathrm{Orb}_g(h(x));$$

把 f 的极限集变成 g 的极限集，即

$$h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x)), \quad h(\alpha_f(x)) = \alpha_g(h(x));$$

把 f 的 n- 周期轨道变成 g 的 n- 周期轨道；把 f 的非游荡集变成 g 的非游荡集；把 f 的不变集变成 g 的不变集. 总之，拓扑共轭的两个动力系统具有相同的轨道拓扑结构，我们认为它们具有相同的动力学性质. 进而，f 在点 $p \in X$ 和 g 在点 $q \in Y$ 称为是 *局部拓扑共轭* 的，如果存在 p, q 的开邻域 $U \subset X$, $V \subset Y$ 和同胚 $h: U \cup f(U) \to V \cup g(V)$，使得 $h(p) = q$, $h(U) = V$ 且 $h \circ f|_U = g \circ h|_U$.

定理 1 (Hartman-Grobman线性化定理) *设 f 为 $C^r (r \geq 1)$ Banach 流形 X 上的 C^r 动力系统，$x_0 \in X$ 为 f 的双曲不动点. 则存在 x_0 的邻域 $U \subset X$ 和 O 的邻域 $V \subset T_{x_0}X$ ，使得 $f|_U$ 与 $Df(x_0)|_V$ 拓扑共轭.*

该定理指出，在双曲不动点附近动力系统的性质等价于它的线性部分. 通常我们称动力系统 f 在双曲不动点处的切映射 $A = Df(x_0)$ 为双曲线性映射.

证明　为叙述简便, 以下只证明 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间的情形并设 $x_0=0$. 相应于双曲线性映射 $A=Df(0)$, 存在 X 的直和分解

$$X=E^s\oplus E^u,\quad AE^s=E^s,\ AE^u=E^u$$

和等价范数, 仍记为 $\|\cdot\|$, 以及常数 $\tau\in(0,1)$, 使得

$$\|x\|=\max\{\|x_s\|,\|x_u\|\},\quad \forall x=x_s+x_u,\ x_s\in E^s,\ x_u\in E^u,$$

并且

$$\|A_s\|=\|(A|_{E^s})\|\le\tau<1,\quad \|A_u^{-1}\|=\|(A|_{E^u})^{-1}\|\le\tau<1. \tag{3.2}$$

对满足 $0<\epsilon<\min\{1-\tau,\|A^{-1}\|^{-1}\}$ 的小 ϵ , 显然存在 0 的小邻域 V 使得 $\phi:=(f-A)|_V$ 是有界 Lipshitz 映射并且 $\mathrm{Lip}(\phi)<\epsilon$. 往下只需证明, 存在同胚 $h=\mathrm{id}+\eta:X\to X$ 使得

$$h\circ(A+\phi)=A\circ h. \tag{3.3}$$

关于 η 的函数方程 (3.3) 可以改写成

$$\eta\circ(A+\phi)=A\circ\eta-\phi, \tag{3.4}$$

其在 E^s,E^u 上的投影为

$$\eta_s\circ(A+\phi)=A_s\circ\eta_s-\phi_s, \tag{3.5}$$

$$\eta_u\circ(A+\phi)=A_u\circ\eta_u-\phi_u. \tag{3.6}$$

注意到 $\mathrm{Lip}(\phi)<\|A^{-1}\|^{-1}$, 易证 $A+\phi$ 也具有 Lipschitz 逆映射, 因此 (3.5) 和 (3.6) 等价于

$$\eta_s=A_s\circ\eta_s\circ(A+\phi)^{-1}-\phi_s\circ(A+\phi)^{-1}, \tag{3.7}$$

$$\eta_u=A_u^{-1}\circ(\eta_u\circ(A+\phi)+\phi_u). \tag{3.8}$$

分别把 (3.7) 和 (3.8) 的右端记为 $\mathcal{T}_s(\eta)$ 和 $\mathcal{T}_u(\eta)$ ，并定义映射 $\mathcal{T}$: $C_b^0(X)\to C_b^0(X)$ 为 $\mathcal{T}(\eta)=\mathcal{T}_s(\eta)+\mathcal{T}_u(\eta)$. 易见

$$\|\mathcal{T}(\eta_1)-\mathcal{T}(\eta_2)\|\le\tau\|\eta_1-\eta_2\|,$$

由压缩映像原理，存 在唯一的 $\eta\in C_b^0(X)$ 满足 (3.3) .

为了表明 $h=\mathrm{id}+\eta$ 是同胚，考虑与 (3.3) 相关存 的函数方程

$$(A+\phi)\circ(\mathrm{id}+\xi)=(\mathrm{id}+\xi)\circ A.$$

同理可证它有唯一解 $\xi\in C_b^0(X)$. 显然 h 和 $g:=\mathrm{id}+\xi$ 存满足 $g\circ h\circ(A+\phi)=g\circ A\circ h=(A+\phi)\circ g\circ h$, 而 $g\circ h=\mathrm{id}+\theta$, $\theta=\eta+\xi(\mathrm{id}+\eta)\in C_b^0(X)$. 易存 见方程

$$(\mathrm{id}+\theta)(A+\phi)=(A+\phi)(\mathrm{id}+\theta)$$

在 $C_b^0(X)$ 的唯一解应是 $\theta=0$, 因此 $g\circ h=\mathrm{id}$. 类似可证 $h\circ g=\mathrm{id}$. 至此，定理得证. □

§3.2 双曲线性映射

我们将满足 (3.1) 的可逆线性映射称为*双曲线性映射* .

定理 2 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. 可逆线性映射 $A\in\mathcal{L}(X,X)$ 是双曲线性映射的充分必要条件为它的存 谱集 $\sigma(A)$ 与复平面上单位圆周 S^1 不相交，即 $\sigma(A)\cap S^1=\emptyset$.

证明 这里只简单给出 $X=\mathbf{R}^m$ 情形的证明. 更一般的情形利用线存 性算子的谱分解定理来完成.

必要性是显然的. 关于充分性，对任意小的 $\epsilon>0$ ， A 总可以相似于

$$\begin{pmatrix} A_-(\epsilon) & 0 \\ 0 & A_+(\epsilon)\end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

其中 $A_-(\epsilon)$ 和 $A_+(\epsilon)$ 都是对角形式的，对角线上由

$$\begin{pmatrix} \mu_k & & & \\ \epsilon & \mu_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \epsilon & \mu_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & & & & & & \\ -\beta_k & \alpha_k & & & & & & \\ \epsilon & 0 & \alpha_k & \beta_k & & & & \\ 0 & \epsilon & -\beta_k & \alpha_k & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \epsilon & 0 & \alpha_k & \beta_k \\ & & & 0 & \epsilon & -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

形式的准对角矩阵组成. 特别是，在 $A_-(\epsilon)$ 中 $0 < |\mu_k| < 1$, $0 < \alpha_k^2 + \beta_k^2 < 1$, $\forall k$，在 $A_+(\epsilon)$ 中 $|\mu_k| > 1$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 1$, $\forall k$. 因此存在分解 $\mathbf{R}^m = E_- \oplus E_+$, 使得

$$A|_{E_-} = A_-(\epsilon), \quad A|_{E_+} = A_+(\epsilon).$$

适当选择 $\mathbf{R}^m$ 的模 $\|\cdot\|$ 可以使得

$$\|A_-(0)\| = \max_{k,j}\{|\mu_k|, (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{1/2}\} < 1.$$

因此对充分小的 $\epsilon > 0$ 必有 $\|A_-(\epsilon)\| < 1$. 类似地也有 $\|A_+(\epsilon)^{-1}\| < 1$. 取 λ 使

$$\max\{\|A_-(\epsilon)\|, \|A_+(\epsilon)^{-1}\|\} \le \lambda < 1.$$

易推出 A 满足 (3.1)，因此 A 是双曲的. □

对有限维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 上的双曲线性映射我们有如下分类：

$$A_j^1 = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}}_{j}, 2, 2, \cdots, 2\right),$$

$$A_j^2 = \operatorname{diag}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}}_{j}, 2, 2, \cdots, 2\right),$$

$$A_j^3 = \mathrm{diag}\left(\underbrace{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}}_{j},-2,2,\cdots,2\right),$$

$$A_j^2 = \mathrm{diag}\left(\underbrace{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}}_{j},-2,2,\cdots,2\right),$$

$$A_0^{1,2} = \mathrm{diag}\,(2,2,\cdots,2)\,,\ A_0^{3,4} = \mathrm{diag}\,(-2,2,\cdots,2)\,,$$
$$A_m^{1,3} = \mathrm{diag}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\cdots,\tfrac{1}{2}\right),\ A_m^{2,4} = \mathrm{diag}\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\cdots,\tfrac{1}{2}\right),$$

其中 $j=1,2,...,m-1$， $\mathrm{diag}(\cdots)$ 简记对角矩阵.

定理 3 $\mathbf{R}^m$ *上任何双曲线性映射都与上述 $4m$ 种标准形之一局部拓扑共轭.*

证明 将构成 (3.9) 的两类准对角矩阵分别简记为 $R(\epsilon,\mu_k)$ 和 $C(\epsilon,\alpha_k+i\beta_k)$. 设 A 是 $\mathbf{R}^m$ 上双曲线性映射. 显然 A 相似于其 (实形式的)Jordan 标准形

$$\mathrm{diag}(R(1,\mu_1),...,R(1,\mu_p),C(1,\alpha_{p+1}+i\beta_{p+1}),...,C(1,\alpha_s+i\beta_s),$$

简记为 $A(1)$ ，其中 $\mu_1,...,\mu_p,\alpha_{p+1}+i\beta_{p+1},...,\alpha_s+i\beta_s$ 为 A 的 s 个互不相同的特征值，各自有重数 $m_1,...,m_s$ 且 $m_1+...+m_s=m$. 这种相似关系是一种拓扑共轭，所以

$$A\sim A(1). \tag{3.10}$$

进而，根据定理 2 ，这些特征值的模都不等于 $0,1$. 因此按 $A(1)$ 的构造，对所有 $t\in[0,1]$ 矩阵 $A(t)$ 都是双曲的. 然而，从定理 1 证明可以推出：如果两个双曲线性映射充分接近则它们一定在 0 点局部拓扑共轭. 因为 $A(t)$ 对 t 连续，由 $[0,1]$ 的紧性知

$$A(1)\sim A(0). \tag{3.11}$$

令 $\alpha_k + i\beta_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, 并令

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \rho_k \cos(1-t)\theta_k & \rho_k \sin(1-t)\theta_k \\ -\rho_k \sin(1-t)\theta_k & \rho_k \cos(1-t)\theta_k \end{pmatrix}.$$

因为 $\rho_k \neq 0, 1$ ，矩阵 $\Gamma(t)$ 对所有 $t \in [0,1]$ 都是双曲的. 与 (3.11) 同理,

$$\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta & \alpha_k \end{pmatrix} = \Gamma(0) \sim \Gamma(1) = \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & \rho_k \end{pmatrix}.$$

因此, 根据 (3.10) 和 (3.11) ， A 局部拓扑共轭于一个对角矩阵 D . 由于交换方阵的两行和相应的两列所得的方阵与原方阵线性相似, 因此不妨设 D 为

$$\mathrm{diag}(\lambda_1^-, ..., \lambda_{r_1}^-, \lambda_1^+, ..., \lambda_{r_2}^+, \gamma_1^-, ..., \gamma_{r_3}^-, \gamma_1^+, ..., \gamma_{r_4}^+) \tag{3.12}$$

其中 $-1 < \lambda_i < 0, i = 1, ..., r_1$; $0 < \lambda_i < 1, i = 1, ..., r_2$; $\gamma_i < -1, i = 1, ..., r_3$; $\gamma_i > 1, i = 1, ..., r_4$; 并且 $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = m$. 进而, 与 (3.11) 同理, D 局部拓扑共轭于

$$D_1 := \mathrm{diag}(\underbrace{-\frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{2}}_{r_1}, \underbrace{\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}}_{r_2}, \underbrace{-2, ..., -2}_{r_3}, \underbrace{2, ..., 2}_{r_4}), \tag{3.13}$$

这是因为 $\Delta(t) := (1-t)D + tD_1$ 对所有 $t \in [0,1]$ 是双曲的并且 $\Delta(0) = D, \Delta(1) = D_1$. 最后, 注意到对 $|\nu| \neq 1$,

$$\Lambda(t) := \begin{pmatrix} \nu\cos\pi t & \nu\sin\pi t \\ -\nu\sin\pi t & \nu\cos\pi t \end{pmatrix}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 是双曲的, 因而

$$\mathrm{diag}(\nu, \nu) = \Lambda(0) \sim \Lambda(1) = \mathrm{diag}(-\nu, -\nu). \tag{3.14}$$

由 (3.12)、(3.13) 和 (3.14) 可推出定理的结论. □

可以证明定理 3 中的 $4m$ 种类型彼此两两不能局部拓扑共轭.

§3.3 稳定流形定理

定理 4 (Hadamard-Perron稳定流形定理) 设 X 是 Banach 空间, $U \subset X$ 是 0 的开邻域, $f \in C^r(U,X)$ 是从 U 到 $f(U)$ 的 C^r 同胚, $r \geq 1$. 若 0 是 f 的双曲不动点, 则存在 0 的邻域 $V \subset U$, 使得集合

$$W_V^s(0) = \{x \in \cap_{k=0}^{+\infty} f^{-k}(V) : \lim_{k \to +\infty} f^k(x) = 0\},$$

$$W_V^u(0) = \{x \in \cap_{k=0}^{+\infty} f^{k}(V) : \lim_{k \to +\infty} f^{-k}(x) = 0\}$$

均为 C^r 映射的图象, 从而具有 C^r 流形结构. 进而, $T_0 W_V^s(0) = E^s$, $T_0 W_V^u(0) = E^u$.

这里 $W_V^s(0)$, $W_V^u(0)$ 分别称为系统的局部 稳定流形 和局部 不稳定流形.

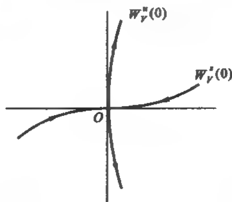


图 4　稳定流形与不稳定流形

证明　记 $f = A + \phi$, $A = Df(0)$，并且 $V = B_b(0) = \{x \in X : \|x\| < b\}$， $B_b^s(0) = B_b(0) \cap E^s$, $B_b^u(0) = B_b(0) \cap E^u$．当 b 充分小时可使

$$\mathrm{Lip}(\phi|_V) < \epsilon < \min\{1 - \tau,\ (\tau^{-1} - 1)/2\}.$$

往证：存在 Lipschitz 映射 $g : B_b^s(0) \to B_b^u(0)$ 使得 $\mathrm{Lip}(g) \le 1$ 且 $W_V^s(0) = \{(x_s, g(x_s)) : x_s \in B_b^s(0)\}$．

按 $W_V^s(0)$ 定义的思想，记

$$S_0(V) := \{a = \{a_k\} \subset V : \lim_{k \to +\infty} a_k = 0\}.$$

按逐项运算的加法、数乘以及范数 $|a| := \sup_k \|a_k\|$， $S_0(X)$ 构成一个 Banach 空间．而 $S_0(V) \subset S_0(X)$ 作为闭子集可当作一个完备度量空间．显然，$x \in W_V^s(0)$ 当且仅当 $Orb_f(x) \in S_0(V)$．因此我们只需寻求序列 $a = \{a_k\} \in S_0(V)$ 满足

$$a_{k+1} = (A + \phi)a_k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.15}$$

对这样的序列显然有 $a_0 \in W_V^s(0)$．将 (3.15) 投影到 E^s 和 E^u 上并整理可得

$$a_k^s = A_s a_{k-1}^s + \phi_s(a_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

$$a_k^u = A_u^{-1}(a_{k+1}^u - \phi_u(a_k)), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{3.17}$$

令 $a_0^s = x_s$ 并记以上两式右端分别为 $\mathcal{T}_s(x_s, a)_k$ 和 $\mathcal{T}_u(a)_k$．定义映射 $\mathcal{T} : B_b^s(0) \times S_0(V) \to S_0(V)$ 为

$$\mathcal{T}(x_s, a)_k = (\mathcal{T}_s(x_s, a)_k,\ \mathcal{T}_u(a)_k).$$

易验证 $|\mathcal{T}(x_s, a) - \mathcal{T}(x_s', a)| \le \|x_s - x_s'\|$．进而，利用 (3.2) 可证

$$|\mathcal{T}(x_s, a) - \mathcal{T}(x_s, a')| \le (\tau + \epsilon)|a - a'|.$$

这表明 $\mathcal{T}$ 是 Lipschitz 映射并一致地对第二变元压缩，因而存在唯一 Lipschitz 映射 $\eta: B_b^s(0) \to S_0(V)$ 使得 $\mathcal{T}(x_s, \eta(x_s)) = \eta(x_s)$, $\forall x_s \in B_b^s(0)$. 记 $g(x_s) := \eta_u(x_s)_0$. 显然 $g: B_b^s(0) \to B_b^u(0)$ 满足 $(x_s, g(x_s)) = \eta(x_s)_0 \in W_V^s(0)$, 因此，$\{(x_s, g(x_s)): x_s \in B_b^s(0)\} \subset W_V^s(0)$. 再由习题 5 结论知这两个集合事实上相等，因为对任一 $x_s \in B_b^s(0)$ ，至多只有一个 $x_u = g(x_s) \in B_b^u(0)$ 使得 $x = (x_s, x_u)$ 满足 $f^k(x) \in V$, $k = 0, 1, \dots$.

进而，如果 ϕ 是 C^r 的，我们不难证明 $\mathcal{T}$ 也 C^r ，从而 η 及 g 是 C^r 的. 至此，定理得证. □

§3.4 法向双曲性

1977 年 Hirch 、 Pugh 和 Shub [19] 对一个不变流形引入了双曲性. 设 V 是光滑 Riemann 流形 X 上的光滑紧子流形，微分同胚 $f: X \to X$ 使 $f(V) = V$. 我们称 f 为在 V 处 法向双曲的 (normally hyperbolic)，如果 X 的切丛在 V 上的限制 $T_V X$ 可分解为三个连续子丛： $T_V X = N^u \oplus TV \oplus N^s$ ，其中 N^u, TV, N^s 对切射 Tf 都不变，并对任意 $p \in V$ 满足

$$m(Tf|_{N_p^u}) > \|Tf|_{T_p V}\|, \tag{3.18}$$

$$\|Tf|_{N_p^s}\| < m(Tf|_{T_p V}), \tag{3.19}$$

这里 $m(A) := \inf\{|A| : |x| = 1\}$ 为线性变换 A 的最小模，当 A 可逆时 $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

在这种意义下他们获得了如下结果.

定理 5 *设 X 是紧致微分流形且 V 为它的紧致 C^1 子流形. $f: X \to X$ 为 C^1 微分同胚，$f(V) = V$ 且在 V 处法向双曲，具有分解 $T_V X = N^u \oplus TV \oplus N^s$. 则 (i) 存在局部 f- 不变子流形 W^u 和 W^s ,*

它们在 V 处分别与 $N^u \oplus TV$ 和 $TV \oplus N^s$ 相切；(ii) 在 V 附近的任意局部不变集必在 $W^u \cup W^s$ 上；(iii) $W^u = \{p \in X : \mathrm{Orb}_f^+(p)$ 绝不会远离 V 而去 $\}$，$W^s = \{p \in X : \mathrm{Orb}_{f^{-1}}^+(p)$ 绝不会远离 V 而去 $\}$；(iv) W^u, W^s 是 C^1 光滑的；(v) 对任意 $p \in V$ 存在 W^u (W^s) 的 C^1-子流形 W_p^{uu} (W_p^{ss})，它在 V 处与 N_p^u (N_p^s) 相切，而 W^u (W^s) 恰以 W_p^{uu} (W_p^{ss}) 来织成.

稳定流形和不稳定流形是特殊的不变流形. 通常一个*不变流形* (invariant manifold) 是指拓扑空间中一个动力系统的不变集并且具有流形结构. 动力系统从不变流形上的点出发的轨道始终都在不变流形上, 因此, 可以把动力系统限制在不变流形上而考虑一个较简单的、维数较低的子系统. 例如, 在双曲不动点附近将系统限制在稳定流形上即成为一个渐近稳定系统. 通过寻找不变流形还可以确定系统轨道的基本结构. 在下一章中我们可以看到, 几个不变流形的相交形式还影响动力系统的结构稳定性. 进而, 在非双曲性的情形下也可以找到一些不变流形, 例如中心流形、中心稳定流形、强稳定流形、弱稳定流形、弱双曲流形等等, 参见 [7] 和 [62] .

[习题 1] 证明 (3.2) .

[习题 2] 设 A 为 X 上的双曲线性映射且 $\phi, \psi \in C_b^0(X)$ 满足

$$\mathrm{Lip}(\phi),\ \mathrm{Lip}(\psi) < \min\{1-\tau, \|A^{-1}\|^{-1}\}.$$

证明存在唯一的 $\eta \in C_b^0(X)$ 使得 $h = \mathrm{id} + \eta : X \to X$ 是同胚, 并且 $h \circ (A+\phi) = (A+\psi) \circ h$.

[习题 3] 设 $\mathbf{R}^m$ 上可逆线性映射 $A(t)$ 对所有 $t \in [a,b]$ 都是双曲的并且对 t 是连续的. 证明 $A(a)$ 与 $A(b)$ 是局部拓扑共轭的.

[习题 4] 证明 $\mathbf{R}^m$ 上双曲线性映射之间的局部拓扑共轭 (在局部) 把收缩子空

间同胚地映满相应的收缩子空间而把扩张子空间同胚地映满相应的扩张子空间.

[习题 5] 设 $f: B_b(0) \to X$ 和 $A = Df(0)$ 如定理 4，并且 $\mathrm{Lip}(f-A) < \epsilon < (\tau^{-1}-1)/2$．如果 $x_s = x'_s$ 且 $f^k(x), f^k(x') \in B_b(0)$，证明： $x = x'$．

[习题 6] 对定理 4 的证明补充关于局部不稳定流形的证明过程.

[习题 7] 找出 $\mathbf{R}$ 上映射 $f(x) = 2x^2 - 5x$ 的不动点和 2- 周期点并判断它们的稳定性.

第四章　结构稳定与分岔

我们总是关心这样的问题：动力系统在小扰动下是否仍会保持轨道的拓扑性质不变？哪些动力系统才是具有这种不变性质的？哪些动力系统不具有这种不变性质的？变又将怎么变呢？这就是我们要讨论的结构稳定和分岔的问题.

§4.1　结构稳定性

C^r 流形 X 上的动力系统 f 称为是 *C^r结构稳定* 的，如果存在 f 在 C^r 拓扑中的邻域 $\mathcal{U}$，使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 都与 f 拓扑共轭. C^1 结构稳定性通常直接简称为结构稳定性. 进而，设 $U \subset X$ 是开集，且 $f \in C^r(U, X)$ 是到其象集的 C^r 同胚. f 在 $p \in U$ 处称为是 *C^r局部结构稳定* 的，如果存在 p 点邻域 $V \subset U$ 及 f 在 $C^r(U, X)$ 中的邻域 $\mathcal{V}$，使得任意 $g \in \mathcal{V}$ 都在某点 $q \in V$ 处与 f 在 p 点处局部拓扑共轭.

定理 1　*设 X 是 Banach 空间，$U \subset X$ 是 O 的开邻域. 若 0 是 $f \in C^1(U, X)$ 的双曲不动点，则 f 在 0 附近是局部结构稳定的.*

证明　第一步，首先证明：存在 0 的邻域 $W \subset U$ 和 f 的 C^1 邻域 $\mathcal{V}$ 使得任意 $g \in \mathcal{V}$ 在 W 中有唯一不动点 c，并且 c 是 g 的双曲不动点.

事实上，X 上双曲线性映射的全体 $H(X)$ 构成可逆有界线性映射空间 $\mathcal{L}(X)$ 上的开集，故存在 δ 使 $A = Df(0)$ 的 δ- 邻域属于 $H(X)$. 由 Df 的连续性，存在 $\alpha > 0$ 使得当 $\|x\| < \alpha$ 时 $\|Df(x) - Df(0)\| < \delta/2$. 因此只要 $\|g - f\|_{C^1} < \delta/2$，当 $\|x\| < \alpha$ 时 $\|Dg(x) - A\| < \delta$. 记

$F = \mathrm{id} - f$ ，则 $DF(0) = \mathrm{id} - A$ 是可逆线性映射，因为将

$$x - Ax = y \tag{4.1}$$

按 (3.2) 的分解分别投影到 E^s 和 E^u 上并整理可得

$$x_s = A_s x_s + y_s, \quad x - u = A_u^{-1}(x_u - y_u).$$

利用 (3.2) 和压缩映像原理可证得 (4.1) 在 X 有唯一解．根据经典的逆映射定理，尤其是逆映射关于原来映射的连续依赖性结果，存在小邻域

$$W = \{x \in X : \|x\| < \beta\},$$
$$V = \{y \in X : \|y\| < \gamma\},$$
$$\mathcal{U} = \{G \in C^1(U, X) : \|G - F\|_{C^1} < \epsilon\},$$

其中 $0 < \beta < \alpha$, $\gamma > 0$, $0 < \epsilon < \delta$ ，使得对任意 $G \in \mathcal{U}$, $y \in V$ 存在唯一的 $x \in W$ 满足 $G(x) = y$ ．取

$$\mathcal{V} = \{g \in C^1(U, X) : \|g - f\|_{C^1} < \epsilon\}.$$

显然，$G = \mathrm{id} - g \in \mathcal{U}$, $\forall g \in \mathcal{V}$. 所以存在唯一的 $c \in W$ 使得 $G(c) = 0$ ，即 $g(c) = c$ ．又因为 $\|Dg(c) - A\| < \delta$ ，故 $Dg(c) \in H(X)$ ．从而完成了第一步的证明．

进而，令

$$\tilde{g}(x) = g(x + c) - c, \quad B = Dg(c) = D\tilde{g}(0).$$

注意到习题 1 的结果，则在 0 附近有局部拓扑共轭关系

$$\tilde{g} \sim B \sim A \sim f.$$

再令 $\tau_c : X \to X$ ， $\tau_c : x \mapsto x + c$ ．显然 $\tilde{g} = \tau_c^{-1} \circ g \circ \tau$ ，因而 g 在 c 附近与 f 在 0 附近局部拓扑共轭．至此，定理得证． □

§4.2 公理 A 系统

记 $\mathrm{Diff}^r(X)$ 为紧致 C^r ($r \geq 1$) Riemann 流形 X 上全体 C^r 微分同胚构成的 (按 C^r 拓扑) 空间. $f \in \mathrm{Diff}^r(X)$ 构成的动力系统称为 *公理 A 系统* ，如果： (i) $\Omega(f)$ 是双曲的， (ii) $\overline{\mathrm{Per}}(f) = \Omega(f)$.

两个不变流形的相交方式对系统的动力学性质的影响很大. 我们称微分流形 M 的两个 C^1 子流形 M_1, M_2 *横截相交* 于点 $q \in M_1 \cap M_2$ 如果 $T_qM_1 \oplus T_qM_2 = T_qM$ ，其中 T_qM_1, $T_qM_2 = T_qM$ 分别为 M_1, M_2 在点 q 处的切空间.



图 5 l_1 和 l_2 横截相交

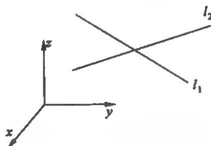


图 6 l_1 和 l_2 不横截相交

1970 年 J.Robbin [43] 给出了如下结果.

定理 2 *如果 $f \in \mathrm{Diff}^2(X)$ 是公理 A 系统，且对任意 $x, y \in \Omega(f)$，在 x 点处的稳定流形 $W^s(x)$ 和在 y 处的不稳定流形 $W^u(x)$ 横截相交，则 f 在 $\mathrm{Diff}^1(X)$ 中是结构稳定的.*

尽管如此，公理 A 系统未必构成 $\mathrm{Diff}^r(X)$ 的开稠集. Newhouse [37] 证明了公理 A 系统甚至在 $\mathrm{Diff}^1(S^2)$ 中都不是稠密的. 然而，如果我们具体地讨论满足条件的系统，即 (i) 所有周期点都是双曲的， (ii) 周期点的稳定流形与不稳定流形横截相交，简称 *Kupka-Smale 系统* ，我们可以得到这样的结论 [50] .

定理 3 *X 上全体 C^r 的 Kupka-Smale 系统的集合 $\mathrm{KS}^r(X)$ 是 $\mathrm{Diff}^r(X)$ 的一个 Baire 集，即可数个稠密开子集的交集.*

更具体地，我们把 $f \in \mathrm{Diff}^r(X)$ 构成的动力系统称为是 Morse-Smale系统，或简称 MS系统，如果：(i) $\Omega(f)$ 是有限集，(ii) 所有周期点都是双曲的，(iii) 周期点的稳定流形与不稳定流形横截相交. J.Palis[40] 证明了如下结果.

定理 4 *X 上全体 C^r 的 MS 系统的集合 $\mathrm{MS}^r(X)$ 是 $\mathrm{Diff}^r(X)$ 的一个开子集. C^r 的 MS 系统是 C^r 结构稳定的.*

如果 X 是二维的，M.Peixoto 还得到进一步的结论 [41].

定理 5 *设 X 是紧致的 C^r（$r \geq 1$）的二维可定向曲面，X 上的 C^r 动力系统 f 是 C^r 结构稳定的，当且仅当 f 是 MS 系统. 而且，X 上全体 C^r 的 MS 系统的集合 $\mathrm{MS}^r(X)$ 是全体 C^r 动力系统（按 C^r 拓扑）的空间 $\mathrm{Diff}^r(X)$ 的一个开稠集.*

§4.3 Ω 稳定性

对于动力系统 $f: X \to X$ 来说，其非游荡点集 $\Omega(f)$ 是一个十分重要的闭不变集. 因为它不仅包含了所有的不动点、周期点、回归点，而且还包含了所有的极限点. 如果说结构稳定性是研究动力系统在小扰动下不改变其轨道的拓扑结构，那么我们也关心一个较弱同时也很重要的问题：动力系统在小扰动下是否改变其 $\Omega(f)$ 集合的拓扑结构？

往下我们将动力系统限制到它的非游荡集上来考虑. 系统 f 和 g 称为是 *Ω共轭* 的，如果存在同胚 $h: \Omega(f) \to \Omega(g)$ 使得

$$h \circ f|_{\Omega(f)} = g|_{\Omega(g)} \circ h.$$

$f \in \mathrm{Diff}^r(X)$ 称为是 C^r-Ω稳定的，如果存在 f 在 C^r 拓扑中的邻域 $\mathcal{U}$，使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 都与 f 是 Ω 共轭的. C^1 的 Ω 稳定性通常也直接称为 Ω 稳定性.

定理 6(谱分解定理) *如果 X 紧致且 $f \in \mathrm{Diff}^1(X)$ 是公理 A 系统，则 $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_s$ 为有限个两两不相交的闭不变集之并，而且每个限制 $f|_{\Omega_i}$ 是拓扑传递的. 这些集合被称为 f 的 基本集.*

该定理详细证明参见 [67]．对任意周期点 p，记 $W_p := W_f^u(p) \cap \Omega(f)$．并记 W_p 的邻域为 $B_\eta(W_p) := \{x \in \Omega(f) : d(x, W_p) < \eta\}$．可以证明对充分小的 $\eta > 0$ 闭包 $\bar{W}_p = B_\eta(\bar{W}_p)$．显然

$$\Omega(f) \subset \cup_{p \in \mathrm{Per}(f)} B_\eta(p) \subset \cup_{p \in \mathrm{Per}(f)} B_\eta(\bar{W}_p) = \cup_{p \in \mathrm{Per}(f)} \bar{W}_p.$$

因为 $\Omega(f)$ 紧致，故存在有限个周期点 $P-1, \ldots, p_k$ 使得 $\Omega(f) = \bar{W}_{p_1} \cup \bar{W}_{p_2} \cup \ldots \cup \bar{W}_{p_k}$．又因为 $f(\bar{W}_{p_j}) = \bar{W}_{f(p_j)}$，所以 f 在 $\{\bar{W}_{p_1}, \bar{W}_{p_2}, \ldots, \bar{W}_{p_k}\}$ 上产生一个置换. 这置换分解成为一些彼此独立的轮换的乘积，每一轮换中所涉及的 $\bar{W}_{p_j}$ 合并在一起构成一个 Ω_i，从而得到了 $\Omega(f)$的分解.

在此基础上定义

$$W^s(\Omega_i) = \{x \in X : \lim_{k \to +\infty} d(f^k(x), \Omega_i) = 0\},$$

$$W^u(\Omega_i) = \{x \in X : \lim_{k \to -\infty} d(f^k(x), \Omega_i) = 0\},$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$ 记 X 上的距离. 定义关系 $\Omega_i \succ \Omega_j$ 为

$$(W^u(\Omega_i) \backslash \Omega_i) \cap (W^s(\Omega_j) \backslash \Omega_j) \neq \emptyset.$$

如果 $\Omega_{i_1} \succ \Omega_{i_2} \succ \ldots \succ \Omega_{i_k} \succ \Omega_{i_1}$，则称这些基本集 $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_k}$ 形成一个环. 如果 $\Omega(f)$ 的基本集中不存在这样的环，我们称 f 满足 *无环条件*． S.Smale 证明了下列结果 [49]:

定理 7　*如果 $f \in \mathrm{Diff}^1(X)$ 是公理 A 系统且满足无环条件，则 f 是 Ω 稳定的.*

动力系统 $f: X \to X$ 在其非游荡集上的限制 $f_1 = f|_{\Omega(f)}$ 成为 $\Omega(f)$ 上的一个动力系统. 同样考虑 $f_2 = f_1|_{\Omega(f_1)}$，如此下去 $\cdots$，我们得到一系列映射 f_i 和一系列集合 $\Omega(f_i)$, $i = 1, 2, \ldots$，满足 $\Omega(f_i) \supset \Omega(f_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$ 可以证明：如果 $\Omega(f_n) = \Omega(f_{n+1})$ 那么 $\Omega(f_n) = \Omega(f_{n+1}) = \Omega(f_{n+2}) = \ldots$ 我们将最后稳定下来的这个集合称为 f 的 *中心* 而将达到稳定所需的最小步数称为 f 的 *中心深度*. 第二章的定理 7 表明：线段上的连续自映射的中心深度 ≤ 2.

§4.4　分　岔

非结构稳定的系统即使一个小扰动也可能改变其轨道的拓扑性质. 这种经扰动后发生轨道拓扑性质变化的现象称为分岔. 设拓扑空间 X 上的动力系统族 f_μ 关于参数 $\mu \in \mathbf{R}$ 连续，$f_0(x_0) = x_0$. 准确地说，f_μ 称为当 $\mu = 0$ 时在不动点 $x_0 \in X$ 处 *分岔*(bifurcation)，如果对任意小的 $\epsilon > 0$ 都存在 $\mu \in \mathbf{R}$, $0 < |\mu| < \epsilon$, 使得 f_μ 在 x_0 附近与 f_0 在 x_0 附近不是局部拓扑共轭的.

通常我们用余维 (codimension) 来刻划分岔的复杂程度. 分岔的 *余维* 是指持久地包含分岔的参数空间之最小维数. 而能持久地包含分岔的参数系统族称为分岔的 *开折*(unfolding).

映射 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 在其不动点 x_0 处有三种方式失去双曲性：$Df(x_0)$ 有特征值 $+1$；$Df(x_0)$ 有特征值 -1；$Df(x_0)$ 有一对共轭复特征值 $\lambda, \bar{\lambda}$ 具有模 1.

对于 $Df(x_0)$ 有特征值 $+1$ 的情形，余维为 1 的分岔有 *鞍结分岔*(saddle-node)、*跨临界分岔*(transcritical) 和 *音叉分岔*(pitchfork)，

它们分别由映射

$$f_\mu(x) = x + \mu - x^2, \tag{4.2}$$

$$f_\mu(x) = x + \mu x - x^2, \tag{4.3}$$

$$f_\mu(x) = x + \mu x - x^3 \tag{4.4}$$

在 $\mu = 0$ 处产生，如图 7 、 8 和 9 所示.

例如在 $\mathbf{R}$ 上考虑系统 (4.2) ，其不动点应满足 $f_\mu(x) = x$ ，即 $\mu - x^2 = 0$. 当 $\mu < 0$ 时 f_μ 没有不动点；当 $\mu = 0$ 时 f_μ 有唯一的不动点 $x = 0$ ；当 $\mu > 0$ 时产生了两个不动点 $x_+ = \sqrt{\mu}$, $x_- = -\sqrt{\mu}$. 显然 $|f'_\mu(x_+)| = |1 - 2\sqrt{\mu}| < 1$ 而 $|f'_\mu(x_-)| = |1 + 2\sqrt{\mu}| > 1$ ，因此 x_+ 是稳定的而 x_- 是不稳定的. 在 $\mu < 0$ 和 $\mu > 0$ 时系统 (4.2) 轨道的拓扑结构是不同胚的，系统在 $\mu = 0$ 处发生了分岔. 通常这样的参数值 $\mu = 0$ 称为 *分岔点* .

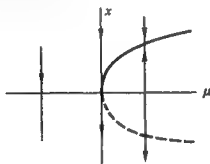


图 7　鞍结分岔

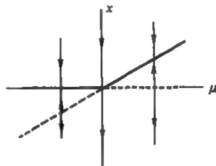


图 8　跨临界分岔

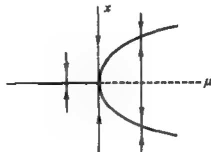


图 9　音叉分岔

对于 $Df(x_0)$ 有特征值 -1 的情形，余维为 1 的分岔是 *翻腾分岔*(flip)，也称为 *倍周期分岔* 或 *次谐分岔*，参见下一节的 Feigenbaum 现象.

对于 $Df(x_0)$ 有一对共轭复特征值 $\lambda, \bar{\lambda}$ 具有模 1 的情形参见 [18].

§4.5 Feigenbaum 现象

往下我们通过一些区间自映射的结果来理解分岔现象 [9].

按第三章的定义，区间自映射 $f: I \to I$ 的不动点 x_0 是 *稳定* 的（或 *不稳定* 的），如果 $|f'(x_0)| < 1$（或 > 1）. 当 $|f'(x_0)| = 1$ 时 f 在 x_0 附近的动力学性质是结构不稳定的，分岔问题将出在样的非双曲情形. 对一般的周期点也有同样的道理.

考虑映射族 $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ 在 $I = [0,1]$ 的迭代，即

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n),$$

其中 $\lambda \in [0,4]$ 为参数. 这个平方映射也称为 Logistic 映射，并记为 $f(x,\lambda)$. 它因为描述了无世代交叠的昆虫逐年的种群量（虫口）的变化规律而被人们重视. 易见 f_λ 的不动点为

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

计算导数 $f'(x^*) = \lambda(1 - 2x^*)$ 知:

当 $\lambda < 1$ 时，只有一个稳定不动点 $x_1^* = 0$.

当 $1 < \lambda < 3$ 时，x_1^* 变成不稳定的，而 x_2^* 成为稳定不动点.

当 $\lambda > 3$ 时，x_2^* 变成不稳定不动点，同时

$$x = f(f(x)) = \lambda\lambda x(1-x)(1 - \lambda x(1-x))$$

有解 $x^*_\pm = \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)})$ ，即 f 出现两个 2- 周期点 x^*_+ 和 x^*_- . 容易验证，当 $\lambda < 1+\sqrt{6}$ 时 x^*_+ 和 x^*_- 是稳定的.

如此继续下去，用数值计算可以发现一个规律： 1- 周期点（不动点）失稳后出现二个稳定的 2- 周期点，每个 2- 周期点失稳后又出现二个稳定的 4- 周期点，每个 4- 周期点失稳后再出现二个稳定的 8- 周期点， $\cdots$ 这种现象称为 *倍周期分岔* . 每次这种“突变”都发生在参数的临界值 — 分岔点处，例如一分为二的分岔点 $\lambda_1 = 3$ 、二分为四的分岔点 $\lambda_2 = 1+\sqrt{6} \approx 3.449\cdots$ 、四分为八的 $\lambda_3 \approx 3.544\cdots$ 、八分为 $\cdots$ 等等，这些分岔点的序列 $\{\lambda_k\}$ 由下面的关系确定：

$$f^{2^{k-1}}(x^*, \lambda_k) = x^*, \quad \frac{d}{dx} f^{2^{k-1}}(x^*, \lambda_k) = -1.$$

这里我们关心稳定周期点的出现，因为它在物理上具有可观测性.

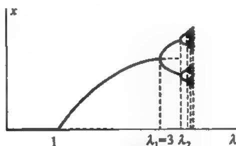


图 10 倍周期分岔

通过计算，还可以发现一个更有趣的现象：

i) $\{\lambda_k\}$ 收敛，且 $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_\infty = 3.569945672\cdots$ ；

ii) 比例 $\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$ 收敛，且趋于 $\delta = 4.669201609\cdots$.

尤其是 δ 具有普适性，它与区间上光滑自映射族的具体形式无关. 我们同样地研究另一些单峰函数族，仍会看到类似的现象和相同的常数 δ . 这个现象首先在 1978 年被美国物理学家 M.J.Feigenbaum 观察到，

因此称为 Feigenbaum现象，常数 δ 称为 Feigenbaum常数．人们甚至将它誉为是继 $\pi = 3.14159\cdots$ 和 $e = 2.71828\cdots$ 之后的第三个重要的常数.

容易看出，如果 $|f'(x_0)| = 0$，映射 $f: I \to I$ 的不动点 x_0 也是稳定的，作为第三章定义的补充，我们称 x_0 是 *超稳定* 的. 对周期轨道也有类似的定义. 如果我们不仅仅考虑稳定周期轨道的分岔，而要进一步考虑超稳定周期轨道，我们将发现它们在单峰函数族中随参数变化分岔出现的顺序与 Sharkovsky 序有关 [55].

函数族 $f_r : [a_r, b_r] \to [a_r, b_r]$, $r \in [\alpha, \beta]$, 称为 *C^1-单峰族*，如果

1° 对任意 $r \in [\alpha, \beta]$，导数 $f_r'(x)$ 连续;

2° 对任意 $r \in [\alpha, \beta]$, $f_r(a_r) = f_r(b_r) = a_r$;

3° 对任意 $r \in [\alpha, \beta]$ 存在 $c_r \in (a_r, b_r)$ 使 $f_r'(c_r) = 0$, $f_r(c_r) \in [a_r, b_r]$，并且当 $x \in [a_r, c_r)$ 时 $f_r'(x) > 0$ 而当 $x \in (c_r, b_r]$ 时 $f_r'(x) < 0$;

4° $a_r, b_r, f_r(x), f_r'(x)$ 都是 r 的连续函数.

特别是当 $f_r(x)$ 还满足 $f_\alpha(c_\alpha) < c_\alpha$, $f_\beta(c_\beta) = b_\beta$ 时，称之为满的 C^1-单峰族.

定理 8 *设 $f_r(x)$ 是满的 C^1-单峰族. 那么，对任意正整数 n，必存在参数 r_n，使 $f_{r_n}(x)$ 有超稳定 n-周期轨道. 进而，如果按 Sharkovsky 序 $n \lhd m$，则 r_n 的最小值必大于 r_m 的最小值.*

定理的证明参见 [9]、[55] 和 [58].

[习题 1] 证明：双曲线性映射 A 在 $\mathcal{L}(X)$ 中的充分小扰动与 A 在 0 附近局部拓扑共轭.

[习题 2] 设 X 为紧致度量空间，$f: X \to X$ 是一个同胚. 紧子集列 $\mathcal{M} = \{M_i : i = 0, 1, ..., k\}$ 称为 f 的滤子，如果 $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_k = M$ 并且 $f(M_i) \subset \mathrm{int}(M_i)$, $i = 1, 2, ..., k-1$. 证明：(i) $K_i(\mathcal{M}) := \cap_{n\in \mathbf{Z}} f^n(M_i \backslash M_{i-1})$

是紧集; (ii) 如果同胚 g 在 C^0 意义下充分接近于 f，则 $\mathcal{M}$ 也是 g 的一个滤子.

[习题 3] 讨论 $f_\mu(x) = x + \mu x - x^2$ 和 $f_\mu(x) = x + \mu x - x^3$ 在 $\mu = 0$ 处的分岔，判断不动点的稳定性.

[习题 4] 讨论 $(0, +\infty)$ 上自映射族 $E_\mu(x) = \mu e^x$ $(\mu > 0)$ 的分岔，判断不动点的稳定性.

[习题 5] 讨论 $g_\mu(x) = \mu - x^2$ 发生的 Feigenbaum 现象，计算头 3 个分岔点.

[习题 6] 证明映射 $f_4(x) = 4x(1-x)$ 在 $I = [0,1]$ 上有 3- 周期点. 提示：考虑映射 $h = h_1 \circ h_2 \circ h_3$，其中 $h_i(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, $h_2(x) = \cos x$ 以及 $h_3(x) = \pi x$，则映射 $\phi(x) = h^{-1}(f_4(h(x))$ 在 I 上具有 3- 周期点 $x^* = 6/7$.

[习题 7] 证明映射 $f_4(x) = 4x(1-x)$ 在 $I = [0,1]$ 上有 3- 周期点. 提示：考虑映射 $h = h_1 \circ h_2 \circ h_3$，其中 $h_i(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, $h_2(x) = \cos x$ 以及 $h_3(x) = \pi x$，则映射 $\phi(x) = h^{-1}(f_4(h(x))$ 在 I 上具有 3- 周期点 $x^* = 6/7$.

[习题 8] 设映射族 $f_\mu(x)$ 关于 x, μ 是 C^1 的， f_{μ_0} 在 I 上有不动点 x_0 且导数 $D_x f_{\mu_0}(x_0) \neq 1$. 证明存在含 x_0 的子区间 $I_0 \subset I$ 和含 μ_0 的子区间 J 使得对任意 $\mu \in J$ 系统 f_μ 在 I_0 上都有唯一不动点 $x(\mu)$，而且 $x(\mu)$ 对 $\mu \in J$ 是 C^1 的并满足 $x(\mu_0) = x_0$.

[习题 9] 设 (X, d) 是紧致度量空间， α, β 是 X 的两个开复盖. 我们称 β 精于 α，记为 $\alpha < \beta$，如果对任意 $B \in \beta$ 都存在 $A \in \alpha$ 使 $B \subset A$. 记 $\alpha \vee \beta = \{A \cap B:\ A \in \alpha,\ B \in \beta\}$. 证明： $\alpha < \alpha \vee \beta,\ \beta < \alpha \vee \beta$.

[习题 10] 设 (X, d) 是紧致度量空间，α 是 X 的开复盖，$N(\alpha)$ 是 α 在 X 上有限子复盖的基数中的最小者，$E(\alpha) = \log N(\alpha)$，$f: X \to X$ 是同胚. 证明 (i) $E(f^{-1}\alpha) = E(\alpha)$，(ii) 极限 $\mathrm{ent}(f, \alpha) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} E(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \ldots \vee f^{-n+1}\alpha)$ 存在. 这里 $f^{-1}\alpha := \{f^{-1}(A):\ A \in \alpha\}$.

[习题 11] 设 (X, d) 是紧致度量空间， $f: X \to X$ 是同胚， $\mathrm{ent}(f) := \sup_\alpha \mathrm{ent}(f, \alpha)$ 称为 f 的拓扑熵 (topological entropy)，其中关于上确界的 α 取遍 X 所有的开复盖. 证明：如果 $f, g: X \to X$ 都是同胚且拓扑共轭，则 $\mathrm{ent}(f) = \mathrm{ent}(g)$.

第五章　混　沌

在上述 Feigenbaum 现象中，当参数 λ 小于 $\lambda_\infty = 3.569945672\cdots$ 而又不断增大时，区间自映射族不断产生倍周期分岔．然而，当参数 λ 超过 λ_∞ 后系统会发生什么现象呢？另外，在 Sharkovsky 序中，包含奇因子的周期数和纯粹偶周期数之间有何关系呢？

§5.1　Li-Yorke 混沌

由 T.-Y.Li 和 J.A.Yorke 在 1975 年给出的结果 [28] 解释了上述这些问题．

定理1　*区间 I 上的连续自映射 f 如果存在 3- 周期点，则*

i) *f 所有的周期数之集 $\mathrm{PP}(f) = \mathbf{Z}_+$;*

ii) *存在不可数集合 $S \subset I \backslash \mathrm{Per}(f)$ ，满足*

(a) $\lim_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0, \quad \forall x, y \in S,\ x \neq y;$

(b) $\lim_{n\to\infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \quad \forall x, y \in S;$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(x_0)| > 0, \quad \forall x \in S,\ x_0 \in \mathrm{Per}(f).$

这个定理表明系统处于一个十分复杂的状态： S 中任意两个点的轨道时而远离时而又无限地接近，而且不趋近于任何周期轨道．这种由映射迭代构成的决定性系统所产生的“敏感依赖性”和“不稳定性”被称为*混沌*（ chaos ）．具体地说，上述定理的 ii 所定义的集合 S 称为*混沌集*，而具有这种混沌集的动力系统称为是 Li-Yorke*混沌* 的．定理 1 表明，周期 3 蕴含混沌．

例 令 $\phi:[0,1]\to[0,1]$ 定义为

$$\phi(x)=\begin{cases}2x, & \text{当}0\le x\le \frac{1}{2}\text{时},\\ 2(1-x), & \text{当}\frac{1}{2}<x\le 1\text{时}.\end{cases}$$

取 $x^*=6/7$，易验证 $\phi(x^*)=2/7,\ \phi^2(x^*)=4/7,\ \phi^3(x^*)=6/7=x^*$，即 x^* 是 3- 周期点. 除了定理 1 的结论外，我们还可以看到 ϕ 的周期点集 $\mathrm{Per}(\phi)$ 的稠密性. 首先把 $x\in[0,1]$ 表示成二进制小数

$$x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k},\quad a_k\in\{0,1\},$$

那么，ϕ 可表示成

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_1-a_{k+1}|}{2^k}$$

$$=\begin{cases}0.a_2a_3\cdots a_k\cdots, & \text{当}a_1=0\text{时},\\ 0.\tilde a_2\tilde a_3\cdots\tilde a_k\cdots, & \text{当}a_1=1\text{时},\end{cases}$$

其中 $\tilde a_k=1-a_k$. 对任意正整数 m，令

$$x_1=0.a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots,$$

$$x_2=0.a_1a_2\cdots a_k\tilde a_1\tilde a_2\cdots\tilde a_ka_1a_2\cdots a_k\tilde a_1\tilde a_2\cdots\tilde a_k\cdots.$$

它们至少有一个是周期 $\le k$ 的周期点，而且 $|x-x_i|<\frac{1}{2^k},\ i=1,2$，因此取 $k\ge m$ 即可. 此外，ϕ 的非周期点在 $[0,1]$ 上也是稠密的，因为 $(0,1]$ 中的二分有理点是稠密的，它们形如 $x=0.a_1a_2\cdots a_k000\cdots$ 或 $x=0.a_1a_2\cdots a_k111\cdots$. 显然，$\phi^k(x)=0$ 或 $\phi^{k+1}(x)=0$, 因此 x 一定不是周期点.

进一步，我们还可以证明以下结论.

定理2 区间 I 上的连续自映射 f 当且仅当具有非 2 方幂的周期时存在混沌集 $S\subset\Omega(f)\backslash\mathrm{Per}(f)$.

事实上，f 一旦具有非 2 方幂的周期，其某次迭代就具有 3- 周期点. 从而按定理 1，f 具有混沌集. 从这个结论看出，在 Feigenbaum 现象中，当参数 λ 超过 λ_∞ 后，系统将出现混沌.

§5.2 符号动力系统

我们简单地考虑两个符号的单边符号空间

$$\Sigma_+(2)=\prod_{j=0}^{+\infty}S_j,\quad S_j=S(2):=\{0,1\},$$

其元素为形如 $s=(s_0,s_1,s_2,...)$ 的单边序列，其中 $s_j\in S(2)$. 定义

$$\delta(a,b)=\begin{cases}1, & \forall a\neq b\in S(2),\\ 0, & \forall a=b\in S(2),\end{cases}$$

并定义

$$d(s,t)=\Sigma_{j=0}^{+\infty}\delta(s_j,t_j)/2^j,$$

其中 $s=(s_0,s_1,...)$ 和 $t=(t_0,t_1,...)$ 属于 $\Sigma_+(2)$. $\Sigma_+(2)$ 关于 $d(s,t)$ 显然成为一个度量空间.

记移位映射 $\sigma:\Sigma_+(2)\to\Sigma_+(2)$ 为

$$s=(s_0,s_1,s_2,\cdots)\mapsto\sigma(s)=(s_1,s_2,\cdots).$$

易见，σ 在空间 $\Sigma_+(2)$ 上定义了一个半动力系统.

定理2 (1) 符号空间 $\Sigma_+(2)$ 是紧致的、完全的且完全不连通的.
(2) σ 的周期点集在 $\Sigma_+(2)$ 上稠密，并且有一条在 $\Sigma_+(2)$ 上稠密的轨道.

证明 关于完全性，只需证明任意点 $s=(s_0,s_1,...,s_n,...)\in\Sigma_+(2)$ 都是极限点. 为此我们取 $s^{(n)}=(s_0,s_1,...,s_n^*,...)$ ，其中当 $s_n=0$ 时取 $s_n^*=1$ 而其余情形下取 $s_n^*=0$. 显然序列 $\{s^{(n)}\}\subset\Sigma_+(2)\backslash\{s\}$ 且 $\lim_{n\to+\infty}s^{(n)}=s$.

关于不连通性，我们指出：$\Sigma_+(2)$ 的任何一个连通子集 D 至多含一个点. 事实上，如果含两个不同的点 $s=(s_0,s_1,...)$ 和 $t=(t_0,t_1,...)$ ，不妨设 $s_k\neq t_k$. 取开集 $U=\{u\in\Sigma_+(2):u_k=s_k\}, V=\{v\in\Sigma_+(2):v_k\neq s_k\}$. 显然 $U\cup V=\Sigma_+(2), U\cap V=\emptyset$, 而 $s\in U\cap D, t\in V\cap D$ ，这与 D 的连通性矛盾.

进而，考虑任意点 $s=(s_0,s_1,...,s_m,...)\in\Sigma_+(2)$. 将其前 m 项的一段反复循环而并构成 $s^{(m)}=(\overbrace{s_0,...,s_m},\overbrace{s_0,...,s_m},...)\in\Sigma_+(2)$. 显然它是 σ 的 m- 周期点，而且当 $m\to+\infty$ 时 $d(s^{(m)},s)=2^{-m}\to 0$. 从而证明了 $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)}=\Sigma_+(2)$.

最后，我们来构造 $\Sigma_+(2)$ 上的一条稠密轨道 t. t 的头两项取成 $0,1$ ，之后依次排上 $0,0,0,1,1,1$ 并穷尽 $0,1$ 的所有二元排列，继而依次排上 $0,0,0,0,0,0,1,...,1,1,1$ 并穷尽 $0,1$ 的所有三元排列，如此下去 $\cdots$. 显然对 $\forall s\in\Sigma_+(2)$, $\forall m\in\mathbf{N}$ ，t 总有某段与 s 的前 m 项的那段重合，即 $\exists k\in\mathbf{N}$ 使 $\sigma^k(t)$ 和 s 两者的前 m 项完全相同. 显然当 $m\to+\infty$ 时 $d(\sigma^k(t),s)=2^{-m}\to 0$. 至此，定理得证. □

类似地可以考虑两个符号的双边符号空间

$$\Sigma(2)=\prod_{j=-\infty}^{+\infty} S_j,\quad S_j=S(2),$$

上的移位映射

$$\sigma: s=(\ldots,s_{-1};s_0,s_1,s_2,\ldots)\mapsto\sigma(s)=(\ldots,s-1,s_0;s_1,s_2,\ldots).$$

它定义了一个动力系统而且也具有上述定理的性质. 这个结果还可以推广到多个符号 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的符号空间 $\Sigma(N)$ 上去. 尤其是考虑 N 阶方阵 $A=(A_{ij})_{N\times N}$ ，其中 $A_{ij}\in\{0,1\}$. 由 A 决定了一个 $\Sigma(N)$ 的子空间

$$\Sigma_A(N)=\{s\in\Sigma(N):\ A_{s_is_{i+1}}=1,\ \forall i\in\mathbf{Z}\}.$$

例如关于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

符号空间 $\Sigma(2)=\prod_{j=-\infty}^{+\infty}S_j,\quad S_j=\{1,2\}$, 相应的子空间是 $\Sigma_A(2)=\{s,t\}$ ，其中 $s=(\ldots,1;1,1,\ldots)$, $t=(\ldots,2;2,2,\ldots)$. 移位映射 σ 在子空间 $\Sigma_A(N)$ 上的限制 $\sigma_A:=\sigma|_{\Sigma_A(N)}$ 称为 (相应于 A) 的 *有限型子移位* ． A 称为 *转移矩阵* .

§5.3 Smale 马蹄

混沌是描述比周期或概周期运动更加复杂的运动方式. 由于这些运动方式的纷繁，使人们难于作出一个统一而严格的定义. 其众多的定性描述或定义在不同的意义下有不尽相同的内涵. 一个广为人们接

受的概念是著名的 Smale 马蹄[67]，它是美国数学家 S.Smale 构造的一个特殊的平面微分同胚．我们从一个一维映射的例子可以看出其构造原理．

考虑映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，

$$x\mapsto -3x^2+\frac{4}{3}$$

所定义的半动力系统．如图 11 和 12, 这个映射把线段 $I=[-1,1]$ 拉长（两倍以上）再折叠覆盖于 I 上．

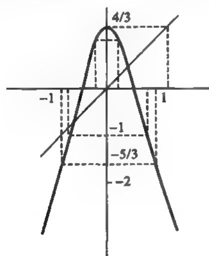


图 11 f 的图象

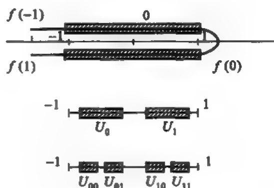


图 12 f 的折叠作用

事实上，$f^{-1}(I)$ 是二段不相交的子线段 U_0 和 U_1 的并集，即

$$f^{-1}(I)=U_0\cup U_1,\quad |U_i|<\frac{1}{2}|I|=1,\ i=0,1,$$

而且

$$f(U_0)=f(U_1)=I\supset U_0\cup U_1.$$

同理，在 U_0 和 U_1 中也各有不相交的子线段 U_{00}, U_{01} 和 U_{10}, U_{11}，满足

$$f(U_{00}) = f(U_{01}) = U_0, \quad f(U_{10}) = f(U_{11}) = U_1,$$

并且

$$|U_{ij}| < \frac{1}{2}|U_i| < \frac{1}{2}, \quad i, j = 0, 1.$$

依次类推．对正整数 k，定义

$$U_{s_0 s_1 \cdots s_k} = U_{s_0} \cap f^{-1}(U_{s_1}) \cap \cdots \cap f^{-k}(U_{s_k}),$$

这里 $s_0, s_1, ..., s_k \in \{0, 1\}$．归纳地可以证明：

引理1 (1) $f(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) = U_{s_1 \cdots s_k}$，且 (2) 线段长度 $|U_{s_0 s_1 \cdots s_k}| < 1/2^k$．

进而，对单边符号空间 $\Sigma_+(2) = \prod_{j=0}^{+\infty} S_j$, $S_j = \{0, 1\}$, 上任意点 $s = (s_0, s_1, s_2, \cdots)$，令

$$U(s) = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_{s_j}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_{s_0 s_1, \cdots s_k}.$$

可以证明：

引理2 (1) $f(U(s)) = U(\sigma(s))$，且 (2) $U(s)$ 是单点集．其中 σ 记 $\Sigma_+(2)$ 上的移位映射．

事实上，利用习题 1 的结果，$f(U(s)) = f(\cap_{k=0}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) = \cap_{k=1}^{\infty} U_{s_1 \cdots s_k} = U(\sigma(s))$．结论 (2) 是引理 1 的结论 (2) 的直接推论．

定理 3

$$\Lambda = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(I) = \bigcup_{s \in \Sigma_+(2)} U(s)$$

是 f 的一个紧致的不变集， $f|_\Lambda$ 拓扑共轭于移位映射 $\sigma:\Sigma_+(2)\to\Sigma_+(2)$，而且 f 在不变集 Λ 上是结构稳定的.

证明 由 Λ 在定理中的定义，它显然是紧致不变集. 兹定义映射 $h:\Sigma_+(2)\to\Lambda$, 使

$$h(s)=U(s),\quad \forall s\in\Sigma_+(2).$$

引理 2 的结论 (1) 表明 $f\circ h=h\circ\sigma$. 欲证与 σ 的拓扑共轭性，只需证明 h 是一个同胚.

注意到 $\Sigma_+(2)$ 关于 $d(s,t)$ 成为一个度量空间. 由上节关于 $d(s,t)$ 的定义知，如果 $s,t\in\Sigma_+(2)$ 使得 $d(s,t)<1/2^n$，那么 s 和 t 从 0 项到第 n 项都完全相同，即 $h(s),h(t)\in U_{s_0\cdots s_n}=U_{t_0\cdots t_n}$. 因此

$$|h(s)-h(t)|<1/2^n,$$

从而 h 连续. 显然 h 是映满 Λ 的. 进而， h 还是单一的. 事实上，如果 $s,t\in\Sigma_+(2)$, $s\neq t$，必存在 $k\in\mathbf{Z}_+$ 使得 $S_k\neq t_k$. 注意到 $h(s)\in U_{s_0\cdots s_k}$, $h(t)\in U_{t_0\cdots t_k}$，即 $f^k(h(s))\in U_{s_k}$, $f^k(h(t))\in U_{t_k}$，而显然 $U_{s_k}\cap U_{t_k}=\emptyset$，所以 $f^k(h(s))\neq f^k(h(t))$，即 $h(s)\neq h(t)$. 最后，注意到 $\Sigma_+(2)$ 作为紧致空间 - 有限离散拓扑空间 $\{0,1\}$ 的乘积空间，它必定是紧致的. 而 $\Lambda\subset\mathbf{R}$ 又是 Hausdorff 空间，因此 h 是同胚.

进而，考虑在 C^1 意义下充分接近 f 的 g，类似地可相应获得 λ' 和 h'. 令 $H=h'\circ h^{-1}:\Lambda\to\Lambda'$，易证 $g=H\circ f\circ H^{-1}$，从而获得 $f|_\Lambda$ 结构稳定性结论. 至此，定理得证. □

定理 3 表明 $f|_\Lambda$ 的动力学性质完全等同于符号动力系统 $\sigma|_{\Sigma_+(2)}$ 的性质. 定理 2 完全刻划了这些性质的复杂性. 关于 Λ 的结构，我们不难想象形成 $U_{s_0},U_{s_0s_1},\ldots,U_{s_0s_1\cdots s_k}$ 的"一生二、二生四"的过程，这正是 Cantor 三分集的构造过程.

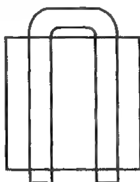


图 13 马蹄映射

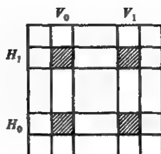


图 14 水平条与竖直条的交

类似上述一维映射的思想我们可以构造一个特殊的平面微分同胚，如图 13, 它把平面 $\mathbf{R}^2$ 上的正方形横向压缩纵向拉长（两倍以上）再折叠成马蹄似的 U 形覆盖于该正方形上. 类似地可以证明它在其不变集上拓扑共轭于一个双边符号空间 $\Sigma(2)$ 的移位映射 σ. 其不变集也具有 Cantor 三分集结构，称为 平面 Cantor 尘, 见图 14 和 15 .

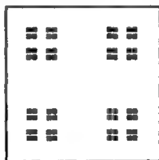


图 15 平面 Cantor 尘

定理 4(Smale-Birkhoff) 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbf{R}^n)$, $r \geq 1$, 具有双曲不动点 x_0 . 如果存在 $q \in \mathbf{R}^n$, $q \neq x_0$, 使得稳定流形 $W^s(x_0)$ 和不稳定流形 $W^u(x_0)$ 横截相交于 q , 则 f 具有一个双曲不变集 Λ 使得 $f|_\Lambda$ 拓扑共轭于一个有限型子移位.

该定理也参见 [18]．定理中的点 q 称为 *同宿点* (homoclinic point), 如图 16．如果 q 是源于不同双曲不动点的稳定流形和不稳定流形横截相交的交点，则称为 *异宿点* (heteroclinic point), 如图 17．该定理表明这类点的存在性蕴含 Smale 马蹄型混沌．有结论表明： Smale 马蹄型混沌还蕴含 Li-Yorke 混沌．

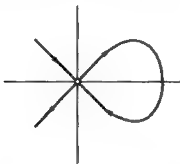


图 16 同宿轨道

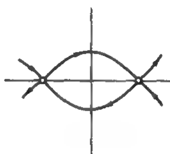


图 17 异宿轨道

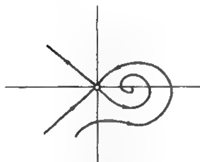


图 18 同宿破裂

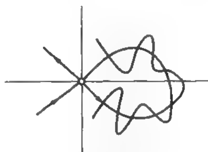


图 19 横截同宿相交

§5.4 分 形

上述定理 2 给出的 Λ 同以前我们见到的不动点、周期轨道一样都是动力系统的不变集．显然 Λ 不像不动点、周期轨道那样具有简单的几何形态，如点、圆周等等，而是呈现出复杂的不规则性．这驱使我们去深入研究它们的几何结构——分形 [13]． *分形* (fractal) 的概念是

1975 年由 B.B.Mandelbrot 引入的．它是指那种“支离破碎”的集合．其几何特征是：几乎其每个点的每个邻域里所包含该集合的点的分布是零落散乱疏稠无规的；在其每个点上没有切线．

非整数的 Hausdorff 维数是分形的一个重要特征．我们用 Hausdorff 维数可以描述集合规模的整体性尺度，其值基本上反映了集合内部点分布的规则或不规则程度．考虑欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ ，其子集 U 的直径指 $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ ．一子集族 $\{U_i\}$ 称为子集 E 的一个 δ- 覆盖，如果 $0 < |U_i| \le \delta$, $\forall i$, 且 $E \subset \cup_i U_i$ ．对 $\delta > 0$, $s \ge 0$ ，定义 $H^s_\delta(E) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty |U_i|^s : \{U_i\}_{i=1}^\infty$ 为 E 的 δ- 覆盖 $\}$ ．令

$$H^s(E) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(E).$$

可以证明：对任意集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ ，都相应存在唯一的实数 s_0 ，满足

$$\begin{aligned} &H^s(E) = \infty, && 0 \le s < s_0, \\ &0 < H^s(E) < \infty, && s = s_0, \\ &H^s(E) = 0, && s_0 < s < \infty. \end{aligned} \tag{5.1}$$

这个实数 s_0 称为集合 E 的 Hausdorff维数，记为 $\dim E = s_0$ ． $H^s(E)$ 称为 Hausdorff s-测度，当 $s = n$ 为整数时（除一个常数因子外）它相当于 E 的 n 维体积．

例 1　平面上单位正方形 □ 的 Hausdorff 维数等于 2．事实上，$H^2_{1/n}(\square) = n^2(\frac{1}{n})^2 = 1$, $H^1_{1/n}(\square) = \infty\cdot\frac{1}{n} = \infty$, 而 $H^3_{1/n}(\square) = n^2(\frac{1}{n})^3 = \frac{1}{n} \to 0$ ．

例 2　上节的不变集 Λ 作为 Cantor 三分集是一个非整数维集合．显然，用直径为 $1/3^k$ 的区间来覆盖 Λ 需要 2^k 段这样的区间．因此

$H^s_{1/3^k}(\Lambda) = 2^k(\frac{1}{3^k})^s = (\frac{2}{3^s})^k$. $\lim_{k\to+\infty} H^s_{1/3^k}(\Lambda)$ 为非 0 常数的充要条件是 $\frac{2}{3^s} = 1$ ，从此算出其 Hausdorff 维数 $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

象马蹄映射一样，通过映射迭代可以产生各种各样的分形. Koch 雪花曲线就是这样产生的，如图 20, 其迭代生成的过程是：从一个正三角形源图开始，将每条线段三等分并将中间一份替换成向外的折线，该折线与原来的那段直线恰构成一小正三角形；将形成的新图形再做上述操作，即将每条线段三等分并将中间一份同样方法替换成折线；····. 如此继续. 这样得到的极限曲线是连续而每点不可切的，可以计算它的 Hausdorff 维数为 $\frac{\log 4}{\log 3}$. 我们甚至可以用几个简单的平面仿射变换

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

作迭代就可以产生许多美丽的分形图案. 这种从一个源图不断作相似变换的迭代从而递归产生自相似分形集的方法简称 迭代法，其极限图形就是这一相似变换的不变集, 其 Hausdorff 维数由变换的 比例因子决定.

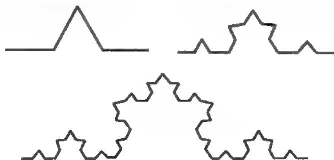


图 20 Koch 曲线形成过程

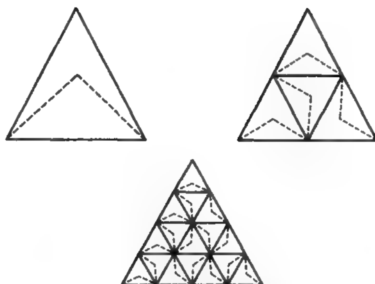


图 21　Peano 曲线形成过程

自相似也是许多分形的重要特征. 粗略地讲, 一个图形称为自相似的, 如果它的每个局部都可以放大为整个图形. Cantor 集是典型的自相似分形. Koch 雪花也具有子相似性. 甚至自然数的 Sharkovsky 序也具有自相似性, 这个序结构的每个片断理解为每一点按 ◁ 的后继, 显然每一片断在一相似变换 (除以 2^k 因子) 后又得到完整的 Sharkovsky 序, 除非这个片断是有限的. 在自然界有很多事物都具有自相似性, 例如树干与树枝、叶脉、根系等等.

现实生活中有许多分形现象, 如植物的生长、海岸线的曲折、地表面的起伏等等. 在物理实验中, 我们也遇到粒子布朗 (Brown) 运动、分子扩散、流体湍流、固体材料断裂等现象提出的分形问题. 我们常常还要推测降雨区的边界、地下储油区的范围、甚至股市价格的波动. 从数学上用映射迭代的极限集来模拟这些不规则现象, 是解决这些问题的常用而有效的方法 ([31], [42]) , 从此也涉及到大量的复动力系统问题 [10] .



图 22 Barnsley 蕨叶片



图 23 Brown 运动

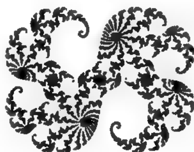


图 24 Julia 集

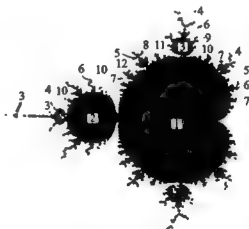


图 25 Mandelbrot 集

[习题 1] 构造一个连续可微映射 $f: I=[0,1]\to I$ 使 f 在 I 上是 Li-Yorke 混沌的.

[习题 2] 设 $f: X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset Y$. 证明: $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$.

[习题 3] 证明本章引理 1.

[习题 4] 对双边符号空间 $\Sigma(N)=\prod_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$，$S_j=\{0,1,...,N-1\}$，证明本章定理 2 和定理 3 .

[习题 5] 计算二维 Cantor 尘的 Hausdorff 维数.

[习题 6] 设 $f(z)=z^2-2$. 用计算机编程绘出单位圆周被 f 迭代 10 次的图形.

[习题 7] 以中心在原点边长为 2 的正方形为源图在 $\mathbf{C}$ 上作映射

$$\begin{cases} z\mapsto 1+2i-\frac{1+i}{2}z \\ z\mapsto -1+2i-\frac{1-i}{2}z \end{cases}$$

迭代 10 次的图形.

[习题 8] 按下表取值在平面上以正三角形为源图用计算机编程绘出迭代系统 (5.2) 产生的分形.

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i
1	0.5	0	0	0.5	0	0
2	0.5	0	0	0.5	1	0
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5

第六章　迭 代 根

我们已经知道，只要函数 f 的值域不超过其定义域，对任意正整数 n 都可以定义 F 的 n 次迭代 $F^n(x)$，其中正整数 n 称为迭代指数. 迭代指数与乘幂指数有一些相似的运算性质：

$$1^\circ \quad F^n \circ F^m = F^{n+m},$$

$$2^\circ \quad (F^n)^m = F^{nm},$$

$$3^\circ \quad F^0(x) = x.$$

如果 F 的定义域和值域相同，且有唯一确定的反函数 F^{-1}，那么迭代 $F^n(x)$ 的指数 n 可推广到一切整数并保持上述三条性质. 一个有趣的问题是：能否像乘幂指数一样把迭代指数从整数推广到全体实数呢？这首先要完成向有理数的推广，或者说，要定义 *分数* 的迭代指数.

在实际应用中，我们常常要考察某个连续变化的过程. 由于客观条件的限制，我们往往只能通过实验来获得一些时间离散的数据 (或图象). 例如每隔同一时间间隔 τ 采集一次数据. 能不能从这些离散资料中找出因果关系，从而得到关于整个发展过程的更系统的知识，这属于动态模式识别的问题. 在数学上，就是要将离散动力系统嵌入连续流，至少要确定每两个数据采集时刻之间的数据，亦即在已经获得 $\{x(k\tau):\ k=0,1,2,...\}$, $x((k+1)\tau)=F(x(k\tau))$, 的情况下确定满足这一变化规律 F 的中间过程 $x((k+\alpha)\tau)$, $0<\alpha<1$, $k=0,1,2,\ldots$. 这首先就要确定 F 的分数次迭代. 要确定 F 的 $\frac{1}{n}$ 次迭代，就必须求解迭代方程

$$f^n(x) = F(x) \tag{6.1}$$

的未知函数 f，即所谓函数的迭代根(iterative root) 问题. 在第 1 章已经指出，迭代根是动力系统理论的基本问题之一.

迭代根是一个古老的问题，早在百年以前 C. Babbage[12]、N. H. Abel[1] 等数学家就开始了这一研究. 迭代根又牵动着动力系统这一现代数学分支的发展，多年来一直被人们关注. 1950 年 R.Isaacs[21] 在一篇精辟的论文中完成了一个奠基性的工作，给出了抽象集上自映射的迭代根存在的充分必要条件.

关于实函数，U.T.Böedewadt[6]、Jr.M.K.Fort[14]、M.Kuczma[24] 等人的工作具有开创性，近年来这方面工作又有不断的推进 [56].

§6.1 迭代周期

求解 (6.1) 使我们联想到代数方程 $z^n = a,\ a \in \mathbf{C}$. 我们知道求解单位根（即 $a=1$ 的情形）在代数上是十分基本和重要的. 如果将 (6.1) 的 F 考虑成迭代半群的单位元 **id**，相应的问题称为单位迭代根问题，相应的方程

$$f^n(x) \equiv x \tag{6.2}$$

称为 Babbage 方程. 反过来，对给定的自映射 f 我们将满足 (6.2) 的最小正整数 n 称为 f 的迭代周期. 需要提醒的是，迭代周期与第 2 章讨论的周期是不同的概念. 如果自同胚 $f: X \to X$ 具有迭代周期 n，那么 X 上任意一点都是 f 的周期点.

什么样的映射才具有迭代周期呢？一般来说，形如

$$f(x) = \frac{(\cos\frac{2\pi}{n})x - \sin\frac{2\pi}{n}}{(\sin\frac{2\pi}{n})x + \cos\frac{2\pi}{n}} \tag{6.3}$$

的映射满足 (6.2)，例如 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ 满足 $f^4(x)\equiv x$．然而并不是所有具有迭代周期的映射都是 (6.3) 形式的线性分式. 如果 f 具有迭代周期 n，则对任意一个可逆映射 h， $h^{-1}\circ f\circ h$ 也具有迭代周期 n．

对于 Babbage 方程 (6.2)，不难看出，2 次 Babbage 方程的解 f 是图象 $y=f(x)$ 关于 $y=x$ 对称的函数, 称为 *对合函数*，例如 $1/x$, $a-x$ 等.

定理 1 *实连续 n 次单位迭代根 f 必为如下形式： $f(x)=x$，或当 n 为偶数时 f 为一个严格递减的对合函数.*

证明 首先 f 是严格单调的. 若不然, 由连续性必可找到 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$, $x_1<x_2$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)$. 从而 $x_1=f^{(n-1)}(f(x_1))=f^{(n-1)}(f(x_2))=x_2$，显然与 $x-1, x_2$ 的选择矛盾.

当 f 严格递增时， $f(x)\equiv x$．否则， $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)>x_0$（或 $<x_0$ ）. 不妨考虑 $>$ 的情形， $x_0>f^n(x_0)>f^{(n-1)}(x_0)>\ldots>f(x_0)>x_0$，从而导致矛盾.

当 f 严格递减时， n 必为偶数，这是因为 $f^n(x)=x$ 必递增. 令 $n=2m$, $m\in\mathbf{N}$, $\phi(x)=f^2(x)$，那么 ϕ 严格递增且满足 $\phi^m(x)=x$．如前讨论知 $\phi(x)\equiv x$，故 $f^2(x)\equiv x$，即 f 是一个严格递减的对合函数. □

例 $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$ 具有迭代周期 4．事实上，令 $h(x)=x^3$，则 $g(x)=h^{-1}(f(h(x)))$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$．而易验证 f 具有迭代周期 4．

§6.2 迭代根存在性

Babbage 方程实质上是单调递增函数的迭代根问题. 更一般地, 令 $I=[a,b]$, 记 $CI(I,I)$ 为从 I 映入自身的、保持端点不变的、严格递增连续函数的全体.

定理 2 (Hardy-Böedewadt) *对任意正整数 n, $CI(I,I)$ 中的函数必有 $CI(I,I)$ 中的 n 次迭代根.*

为了证明定理 2, 我们将利用下列结果.

定理 3 *$F,\ f\in CI(I,I)$, n 为正整数. 如果 f 是 F 的 n- 次迭代根, 则存在一个函数 $h\in CI(I,I)$, 使得*

$$h(f(x))=F(h(x)),\quad \forall x\in I. \tag{6.4}$$

换言之, $CI(I,I)$ 上函数的迭代根必与该函数共轭.

定理 3 证明 若 f 有不动点 $c\in(a,b)$, 由递增性我们可分段在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上讨论. 不妨设 f 在 (a,b) 无不动点, 即 $f(x)>x,\ \forall x\in(a,b)$; 或 $f(x)<x,\ \forall x\in(a,b)$. 我们只需证第一种情形. 第二种情形通过 $f_1(x)=(b+a)-f(b+a-x)$ 可化为第一种情形.

首先, 任选 $x_0\in(a,b)$, 并令

$$x_i=f^i(x_0),\ y_0=f(x_0),\ y_i=f^{ni}(y_0),\quad i=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{6.5}$$

由于 f 递增且 $f(x)>x,\ \forall x\in(a,b)$, 序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 都递增且当 $i\to-\infty$ 时趋于 a 而当 $i\to+\infty$ 时趋于 b. 定义

$$h_0(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0),\quad \forall x\in[x_0,x_1]. \tag{6.6}$$

如图 26, 显然 $h_0(x)$ 连续、递增, 且

$$h_0(x_0)=y_0,\quad h_0(x_1)=y_1. \tag{6.7}$$

自然地，$h_0(f(x_0)) = h_0(x_1) = y_1 = f^n(y_0) = f^n(h_0(x_0)) = F(h_0(x_0))$.
然后，对 $i = 1, 2, \dots$ ，我们递归地定义

$$h_i(x) = f^n(h_{i-1}(f^{-1}(x))), \qquad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{6.8}$$

$$h_{-i}(x) = (f^n)^{-1}(h_{-i+1}(f(x))), \quad \forall x \in [x_{-i}, x_{-i+1}]. \tag{6.9}$$

用归纳法可证明 $h_i(x)$ 和 $h_{-i}(x)$ 连续递增且满足

$$h_i(x_i) = y_i, \qquad h_i(x_{i+1}) = y_{i+1}; \tag{6.10}$$

$$h_{-i}(x_{-i}) = y_{-i}, \quad h_{-i}(x_{-i+1}) = y_{-i+1}. \tag{6.11}$$

最后定义

$$h(x) = \begin{cases} x, & x = a,\ b \\ h_i(x), & x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{6.12}$$

易验证 $h \in CI(I, I)$ 且满足 $h(f(x)) = F(h(x)),\ \forall x \in I$. □

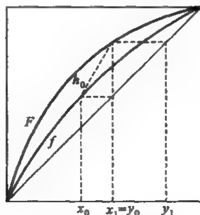


图 26 初始函数 $h_0(x)$ 的选择

定理 2 证明 设 $F \in CI(I,I)$. 由定理 3 存在函数 $h \in CI(I,I)$ 满足 $F(x) = h^{-1}(F^n(h(x)))$. 令

$$f(x) = h^{-1}(F(h(x))). \tag{6.13}$$

易见 $f(a) = a,\ f(b) = b$, 而且 f 也是 I 上连续递增函数. 因为 $f^n(x) = h^{-1}(F^n(h(x))) = F(x)$, 所以 f 是 F 的 n 次迭代根. □

从定理 2 证明可见, 迭代根 f 取决于函数 h , 而定理 3 证明表明 h 不是唯一确定的, 它依赖于初始函数 h_0 的选择. 选择 h_0 的实质性要求是 (6.7) , 在区间 $(x_0, f(x_0))$ 内连续递增函数 h_0 的定义具有很大的随意性, 完全不必是线性形式 (6.6) . 因而迭代根通常不唯一. 定理 3 证明中用到的所谓 **逐段定义法** 是处理迭代问题的有效方法之一.

众所周知, 对正实数 a 方程 $x^n = a$ 仅有正的奇次实根, 或既有正又有负的偶次实根; 对负实数 a 此方程仅有负的奇次实根而无偶次实根. 然而, 对单调连续的实函数 $F(x)$, 其迭代根问题是否也有这样的 "开方" 性质呢? 下面的结果回答了这个问题.

定理 4 ([25]) *如果 $F \in C(I,I)$ 严格递增, 那么 F 有各次严格递增的连续迭代根. 如果 $F \in CI(I,I)$ 且 $\xi \in \mathrm{Fix}(F)$ 使得存在严格递减满射 $\alpha:\mathrm{Fix}(F) \cap [a,\xi] \to \mathrm{Fix}(F) \cap [\xi, b]$ 满足 $(F(x)-x)(F(y)-y) < 0$, $\forall x \in (a,b), \forall y \in (\alpha(b), \alpha(a))$, 其中 (a,b) 是并成 $[a,\xi] \setminus \mathrm{Fix}(F)$ 的若干不相交的开区间中的任意一个, 那么 F 有 2 次严格递减的连续迭代根.*

显然, 一个严格递增的 $F \in C(I,I)$ 的 $2m$ 次严格递减连续迭代根问题实质上是严格递增的 $G \in C(I,I)$ 的 2 次严格递减连续迭代根问题, 其中 G 是 F 的严格递增的 m 次连续迭代根.

定理 5([54]) *$F \in C(I,I)$ 严格递减, 且或者 $F(a) = b,\ F(b) = a$, 或者 $a < F(x) < b,\ \forall x \in I$. 那么对任意奇数 $2m+1 \geq 3$, 函数 F 有连续递减的 $2m+1$ 次迭代根.*

定理 6([57]) $F \in C(I,I)$ 有唯一不动点 $x_0 \in I$. 如果在小邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中, $F(x) > x_0$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ 且 $F(x) \le x_0$, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$, 那么对任何偶正整数 $2m$, 函数 F 在 $C(I,I)$ 上都不存在 $2m$ 次迭代根. 进而, 严格递减函数没有连续的 $2m$ 次迭代根.

当 F 含有一点不单调的因素时, F 的迭代根问题会变得十分复杂.

定理 7 设 $F \in C(I,I)$ 是满射且有一极值点 $c \in I$, F 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 都严格单调. 那么对任何正整数 $n \ge 2$ 函数 F 都不存在连续的 n 次迭代根.

该定理证明留作练习.

§6.3 非单调函数的迭代根

目前, 对一类特殊的非单调函数 – 严格逐段单调连续函数, 我们有办法讨论其迭代根问题. $x_0 \in (a,b)$ 称为函数 $F: I \to I$ 的 *单调点* , 如果 $F(x)$ 在 x_0 的一个邻域上严格单调. 否则, x_0 称为 *非单调点* . $F \in C(I,I)$ 称为 *严格逐段单调连续函数* , 或简称 S-*函数* , 如果 $F(x)$ 仅有有限个非单调点. 这类函数的全体记为 $S(I,I)$.

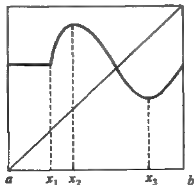


图 27 非单调点

值得注意的是, 极值点是非单调点而非单调点未必是极值点. 区间端点既不是极值点又不是非单调点. 如图 27 所示函数, 只有 x_2, x_3 是极值点, 区间 $(a, x_1]$ 上的所有点都是非单调点, 而端点 a, b 既不是极值点又不是非单调点. 显然该图所示函数不是 S- 函数. 显然, $F_1, F_2 \in S(I, I)$, 则 $F_2 \circ F_1 \in S(I, I)$; 反之, 若 $F_2 \circ F_1 \in S(I, I)$, 则 $F_1 \in S(I, I)$. 从而我们有 $F^n \in S(I, I)$ 当且仅当 $F \in S(I, I)$.

令 $N(F)$ 表示 S- 函数 F 在 I 上非单调点的个数. 显然

$$0 = N(F^0) \leq N(F^1) \leq N(F^2) \leq \cdots \leq N(F^m) \leq \cdots. \tag{6.14}$$

特别是当 F 在 I 严格单调时 $N(F) = 0$. $H(F)$ 记满足 $N(F^m) = N(F^{m+1})$ 的最小正整数 m. 注意到, $H(F) = \infty$ 意味着序列 $\{N(F^m)\}$ 严格递增, 而当 $H(F) = m < \infty$ 时对任意自然数 k, 有 $N(F^m) = N(F^{m+k})$, 并且

$$H(F^k) = [m/k] + \mathrm{sgn}(m/k - [m/k]). \tag{6.15}$$

定理 8 *设 $F \in S(I, I)$ 且 $H(F) > 1$, 那么对任意整数 $n > N(F)$, 函数 F 没有连续的 n 次迭代根.*

证明 假设 F 有 n 次迭代根 $f \in C(I, I)$. 自然地, $f \in S(I, I)$. 由于 $H(F) > 1$, 必然 $N(F^2) > N(F)$, 即 $N(f^{2n}) > N(f^n)$, 这意味着 $H(f) > n$ 且 $0 = N(f^0) < N(f) < N(f^2) < \ldots < N(f^n)$. 因此, $N(f^n) = N(F) \geq n$, 这与定理对 n 的假设矛盾. □

进而, 我们讨论 $F \in S(I, I)$ 在 $H(F) \leq 1$ 的情形. 令 $m = \min\{F(x) : x \in I\}$, $M = \max\{F(x) : x \in I\}$. 称 $[a', b']$ 为 F 的特征区间, 如果 a' 和 b' 为 F 在 I 上两个相邻的非单调点 (或端点), 且满足 $[m, M] \subset [a', b'] \subset [a, b]$.

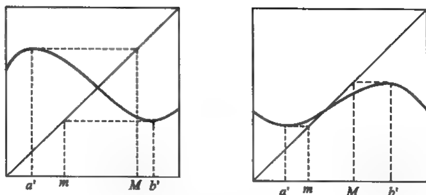


图 28 特征区间

对任意 $F \in S(I,I)$ ，如果 $H(F) \le 1$ ，则一定存在一个特征区间 $[a',b']$ ，因为 $H(F) \le 1$ 即 $N(F) = N(F^2(x))$ ，这当且仅当 F 在 $[m,M]$ 上严格单调. 事实上, 如果 F 有极值点 $c \in [m,M]$ ，由连续性, 必存在单调点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $F(x_0) = c$. 因此 x_0 是 F^2 的另一个极值点, 从而 $N(F^2) > N(F)$ ，给出了与基本假设矛盾的说法. 显然， F 在特征区间 $[a',b']$ 上是严格单调的.

定理 9 $F \in S(I,I)$ 且 $H(F) \le 1$. 假设 (i) F 在其特征区间 $[a',b']$ 上递增, 并且 (ii) 如果 $F(a') \ne a'$ 且 $F(b') \ne b'$ 则函数 F 在 I 不能达到 a' 和 b' . 那么对任意整数 $n \ge 2$ ，函数 F 有连续的 n 次迭代根. 另外, 这些条件对整数 $n > N(F) + 1$ 还是必要的.

为证明定理 9 ，我们需要以下引理.

引理 1 $F \in S(I,I)$ 且 $H(F) \le 1$. 函数 F 有连续的 n 次迭代根 f ，整数 $n \ge 2$. 那么 (i) F 在其特征区间 $[a',b']$ 上严格单调且映入自身; (ii) F 所有的周期点在 $[a',b']$ 内; (iii) f 所有的周期点在 $[a',b']$ 内; (iv) f 在 $[a',b']$ 上严格单调且映入自身; (v) $f^n = F(x)$, $\forall x \in [a',b']$; (vi) 如果整数 $n > N(F) + 1$ 且 $x' \in I$ 使得 $F(x') = a'$ 或 b' ，则

$x' \in [a', b']$.

证明 令 $m_i = \min\{F^i(x) : x \in I\}$, $M_i = \max\{F^i(x) : x \in I\}$. 显然,序列 $\{m_i\}$ 和 $\{M_i\}$ 分别是单调不减和单调不增的. 注意到 $[m_1, M_1] \subset [a', b']$, 由特征区间的定义可直接得到结论 (i) . 设 $x_0 \in I$ 为 F 的 k- 周期点, 则 $x_0 = F^k(x_0) \in [m_k, M_k] \subset [m_1, M_1] \subset [a', b']$, 结论 (ii) 得证. 由于所有 f 的周期点都是 F 的周期点, 从而结论 (iii) 得证.

根据 (i) 的结论, 注意到 $f^n \in S(I, I)$ 当且仅当 $f \in S(I, I)$, 可以直接推论 (iv) 的单调性结论. (iv) 的另一半是要证明 $f([a', b']) \subset [a', b']$. 当 f 在 $[a', b']$ 上递增时, 如果 $f(a') < a'$, 则根据 $f(a) \geq a$ 和连续性知存在 $x_1 \in [a, a')$ 使 $f(x_1) = x_1$, 这表明 f 在 $[a', b']$ 外有周期点, 从而与 (iii) 结论矛盾. 因此 $f(a') \geq a'$. 同理可证 $f(b') \leq b'$. 当 f 在 $[a', b']$ 上递减时, 也不难证明同样的结果. 显然, (v) 由 (iv) 直接推出.

注意到 $n > N(F) + 1 > N(F)$ 意味着 $H(f) < n$. 否则, $0 = N(f^0) < N(f) < N(f^2) < \ldots < N(f^n)$, 从而给出一个荒谬的说法 $N(f^n) \geq n > N(F)$. 因此我们得到 $N(f^{n-1}) = N(F)$, 进而 $N(f^{n-1}) = N(f^{n-1} \circ f^{n-1})$, 即 $H(f^{n-1}) \leq 1$. 由于 f^{n-1} 与 $f^n = F$ 有共同的非单调点, 而且

$$[\min f^{n-1}, \max f^{n-1}] \supset [m_1, M_1],$$

故 $[a', b']$ 也是 f^{n-1} 的特征区间, 并且 f^{n-1} 将 I 映入 $[a', b']$. 因此, $F = f \circ f^{n-1}$ 在 I 上达到 a' (或 b')意味着 f 在 $[a', b']$ 上也达到 a' (或 b'). 由 f 的单调性, 当递增时显然 $f(a') = a'$ (或 $f(b') = b'$), 从而 $F(a') = a'$ (或 $F(b') = b'$). 当递减时也不难证明 (vi) 的结论. □

引理 2 $F \in S(I, I)$ 且 $H(F) \leq 1$. F 的特征区间为 $I' = [a', b']$, m, M 记函数 F 在 $I = [a, b]$ 的最小值和最大值, m', M' 记 F 在 I' 的最

小值和最大值. 如果限制在 I' 上函数 F 有连续的 n 次迭代根 f_1，整数 $n \geq 2$ 而且 f_1 把 I' 映入自身并把 $[m, M]$ 映入 $[m', M']$，那么存在连续函数 $f: I \to I$ 满足 (i) $f(x) = f_1(x), \forall x \in I'$；(ii) $f^n = F(x), \forall x \in I$.

证明 令 F_1 为 F 在 I' 上的限制，由引理 1 给出的单调性知，$F_1^{-1}: [m', M'] \to I'$ 是连续的. 令

$$f = F_1^{-1} \circ f_1 \circ F.$$

由于对 $x \in I$ 有 $F(x) \in [m, M] \subset I'$，而且对 $y \in [m, M]$ 有 $f_1(y) \in [m', M']$，上述 f 在 I 的定义是合理的，而且 $f: I \to I'$ 是连续的. 易见

$$f^n(x) = F_1^{-1} \circ f_1^n \circ F(x) = F_1^{-1} \circ F_1 \circ F(x) = F(x), \quad \forall x \in I.$$

从而引理得证. □

定理 9 的证明 由 Hardy-Böedewadt 定理 (§6.2 定理 2) 及其推论，F 在特征区间 $I' = [a', b']$ 上有 n 次连续迭代根 f_1，它满足 $m' = F(a') \leq f_1(m) < f_1(M) \leq F(b') = M'$. 根据引理 2，$f_1$ 可以延拓为 F 在整个 I 上的 n 次连续迭代根 f. 另外，对于 $n > N(F) + 1$，由引理 1 的 (vi) 知定理的条件 (b) 是必要的，由 §6.2 定理 6 知条件 (a) 也是必要的. □

定理 10 *$F \in S(I, I)$ 且 $H(F) \leq 1$. 假设 (i) F 在其特征区间 $[a', b']$ 上递减，并且 (ii) 或者 $F(a') = b'$, $F(b') = a'$，或者 $a' < F(x) < b', \forall x \in I$. 那么对任意奇数 $n > 0$，函数 F 有连续的 n 次迭代根.*

定理 10 的证明以及关于逐段单调函数迭代根的其它结果和问题参见 [54] 和 [64].

§6.4 迭代根光滑性

定理 11 (Böedewadt) $F\in C^\infty(J,J)$, J 是开区间, $F(x)>x$ 且导数 $F'(x)>0$. 那么对任意整数 $n\ge 2$, 函数 F 在 $C^\infty(J,J)$ 中必有 n 次迭代根.

这是一个经典而直观的结果 [6]. 按上述逐段定义法思想, 其证明也是不难的. 它表明: 区间上严格递增且无不动点的光滑自映射必有光滑迭代根. 如果映射有不动点, 情况则大不相同. 往下 $C^k(I,I)$ 记 C^k 函数 $F:I\to I$ 的全体.

定理 12 区间 $I\subset\mathbf{R}$. 假设 (i) $F\in C^1(I,I)$, $F'(x)>0$, $\forall x\in I$; (ii) F 在 I 有唯一的不动点 x_0 并且 $F'(x_0)\ne 1$; (iii) $F''(x_0)$ 有定义. 那么, 对任意整数 $k>1$, 函数 F 在 $C^1(I,I)$ 有唯一严格递增的 k 次迭代根 f.

定理 12 给出了在双曲不动点附近存在 C^1 迭代根的条件, 它表明这种存在性是唯一的. 我们先证明一个引理, 其结果比 Hartman-Grobman 线性化定理要强, 因为得到的共轭关系是 C^1 的.

引理 3 在定理 9 条件下, 存在 I 上严格单调的连续可微函数 $h(x)$, 满足

$$h'(x_0)\ne 0,\quad h(F(x))=F'(x_0)h(x).\quad \forall x\in I \tag{6.16}$$

这样的 h 虽不必唯一, 但只相差一个非 0 常数因子.

证明 首先考虑 $F'(x_0)<1$ 的情形. 由于 $F''(x_0)$ 存在, 故存在 $\delta>0$, 使 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|F(x)-F(x_0)|<q|x-x_0|, \tag{6.17}$$

$$|F'(x)-F'(x_0)|<M|x-x_0|, \tag{6.18}$$

其中 $q=(1+|F'(x_0)|)/2<1$, $M=|F''(x_0)|+1$. 简记 $c=F'(x_0)$, 考虑序列 $h_n(x)=c^{-n}(F^n(x)-x_0)$, $n=0,1,2,\dots$, 并令

$$h(x)=(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x)-h_n(x)).$$

我们指出，其中的无穷级数在 x_0 的充分小邻域上一致收敛并逐项可导. 事实上， $h_n(x_0)=0$ ，由连续性， $|h_{n+1}(x)-h_n(x)|$ 在 x_0 的某邻域上不超过一个小于 1 的常数，从而级数局部一致收敛. 进而，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，由 (6.17) 和 (6.18) ，有

$$\begin{aligned}|h'_{n+1}(x)-h'_n(x)|&=|c^{-(n+1)}|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^{n+1}(x)-c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^n(x)\right|\\&=|c|^{-(n+1)}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^n(x)\right||F'(F^n(x))-F'(x_0)|\\&=\frac{1}{|c|^{n+1}}(|c|+M\delta)^nM|F^n(x)-x_0|=\frac{M\delta}{|c|}\left(\frac{q(|c|+M\delta)}{|c|}\right)^n.\end{aligned}$$

由于可取 $\delta>0$ 充分小，使 $q(|c|+M\delta)/|c|<1$ ，用 Cauchy 判别法知该级数逐项求导后仍局部一致收敛. 因此 h 在 x_0 附近连续可微，而且 $h'(x_0)=1$. 显然

$$\begin{aligned}h(x)&=h_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x)-h_n(x))\\&=\lim_{n\to+\infty}h_n(x)=\lim_{n\to+\infty}c^{-n}(F^n(x)-x_0),\end{aligned}$$

从而在 x_0 附近 $h(F(x))=\lim_{n\to+\infty}c^{-n}(F^{n+1}(x)-x_0)=ch(x)$, 即验证了 (6.16) .

进而我们把局部的 h 连续可微地开拓到整个 I 上去. $|F'(x_0)|<1$ 表明 x_0 为稳定不动点，它必吸引附近的点. 而 x_0 是 I 上唯一不动点，

并且 F 严格递增，易见

$$\lim_{n\to+\infty} F^n(x) = x_0, \quad \forall x \in I. \tag{6.19}$$

于是，$\forall x \in I, \exists n \in \mathbf{Z}_+$, 使 $F^n(x)$ 进入 x_0 的充分小邻域而使 $h(F^n(x))$ 和 $h(x) = c^{-n}h(F^n(x))$ 都有定义，因此完成 h 的开拓.

最后证明严格单调性．若不然，存在 $x_1 \neq x_2$ 使 $h(x_1) = h(x_2)$，由 (6.16) 知 $h(F^n(x_1)) = h(F^n(x_2))$．因为 F 严格单调，$F^n(x_1) \neq F^n(x_2)$，而由 (6.19) 知 h 在 x_0 附近不是严格单调的．这显然与 h 在 x_0 附近连续可微且 $h'(x_0) = 1 > 0$ 矛盾.

注意到 $h(x_0) = 0$，即 $h^{-1}(0) = x_0$．这在 (6.16) 中取 $x = x_0$ 并由 $c \neq 1$ 得知．因此，对满足 (6.16) 的任意两个 h_1，h_2,

$$\begin{aligned}\frac{h_1(x)}{h_2(x)} &= \frac{h_1(F^n(x))}{h_2(F^n(x))} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{h_1(F^n(x)) - h_1(x_0)}{F^n(x) - x_0}\right)\left(\frac{F^n(x) - x_0}{h_2(F^n(x)) - h_2(x_0)}\right) \\ &= \frac{h_1'(x_0)}{h_2'(x_0)}.\end{aligned}$$

故这样的 h 虽不必唯一，但只相差一个非 0 常数因子.

关于 $F'(x_0) > 1$ 的情形，由不动点的唯一性，必定 F 映满，即 $F(I) = I$．令 $G = F^{-1}$，它显然为 I 上自映射且 $G'(x_0) < 1$，从而，按上一情形，可得到满足 (6.16) 的 h. 易见 h 对 F 也满足同样的关系.

□

定理 12 的证明 由引理 3，存在 I 上严格单调的连续可微函数 $h(x)$, 满足 $F(x) = h^{-1}(ch(x))$，其中 $0 < c = F'(x_0) \neq 1$．对给定的正

整数 k, 取

$$f(x)=h^{-1}(c^{1/k}h(x)). \tag{6.20}$$

易验证 $f^k(x)=F(x)$. 由于 $h'(x_0)\neq 0$, 故 f 连续可微.

反过来,对 F 任意一个 C^1 的 k 次光滑迭代根 f , 它必形如 (6.20) . 事实上, 这时 f 满足 $F\circ f(x_0)=f^{k+1}(x_0)=f\circ F(x_0)=f(x_0)$. 然而 F 只有一个不动点, 故 $f(x_0)=x_0$. 从而在不动点 x_0 处有 $f'(x_0)=(F'(x_0))^{1/k}=c^{1/k}$. 令

$$G(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x).$$

在 (6.16) 中取 $x=x_0$ 并 由 $c\neq 1$ 知 $h(x_0)=0$, 即 $h^{-1}(0)=x_0$. 因此 $G(0)=0$ 且 $G'(0)=f'(x_0)=c^{1/k}$. 由于

$$\begin{aligned}cG(x)&=h\circ h^{-1}(ch\circ f\circ h^{-1}(x))=h\circ F\circ f\circ h^{-1}(x)\\&=h\circ f\circ F\circ h^{-1}(x)=h\circ f\circ h^{-1}\circ h\circ F\circ h^{-1}(x)\\&=G(cx),\end{aligned}$$

那么 $c^nG(x)=G(c^nx)$. 从而

$$G(x)=\frac{G(c^nx)}{c^n}=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{G(c^nx)}{c^nx}\right)x=G'(0)x=c^{1/k}x.$$

因此 $f(x)=h^{-1}\circ G\circ h(x)=h^{-1}(c^{1/k}h(x))$.

由于 (6.20) 的形式由 h 唯一确定. 引理 3 指出, h 虽不必唯一但只相差一个非 0 常数因子, 那么对另一个 $h_1=\lambda h$, 显然有

$$h_1^{-1}(c^{1/k}h_1(x))=h^{-1}(\lambda^{-1}c^{1/k}\lambda h(x))=h^{-1}(c^{1/k}h(x)).$$

故唯一性得证. □

如果说迭代根在一个不动点附近的光滑性是局部问题，那么同时考虑在两个不动点处的光滑性问题就是全局性的，因为这时必须同时考虑在介于两个不动点之间的区间上的光滑性. 人们一直猜测迭代根很难在区间两个端点不动点附近同时光滑. 1995 年这个想法得到了证实 [63]. 令 $I=[0,1]$, $A^1(I)$ 为满足 $F'(x)>0, \forall x\in I$, $F(x)\neq x$, $\forall x\in(0,1)$ 且使得对端点 $y=0,1$, $F(y)=y, F'(y)\neq 1$, $F''(y)$ 有定义的 C^1 函数 $F:I\to I$ 全体. $E^1(I;m,M)$ 为满足 $f(0)=0, f(1)=1$ 且 $m\le f'(x)\le M$, $|f'(x_1)-f'(x_2)|\le M$, $\forall x,x_1,x_2\in I$ 的 C^1 函数 $f:I\to I$ 全体. 其中 $0<m<M$ 为常数. 关于 C^1- 范数 $\|\cdot\|_1$ 的诱导距离, $A^1(I)$ 和 $E^1(I;m,M)$ 是 $C^1(I,I)$ 的子空间，而且 $E^1(I;m,M)$ 还是闭子空间.

定理 13 *给定整数 $k\ge 2$. $A^1(I)$ 中的 C^1- 光滑函数通有地不具有 $E^1(I;m,M)$ 上的光滑 k 次迭代根.*

证明参见 [63]. 注意到，在距离空间 X 中命题 P 称为*通有的*，如果 P 在 X 的可数个稠密开子集的交集上成立.

[习题 1] 通过在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\pm1,\pm2,\dots$ 上逐段定义 $f^i(x)$ 来证明定理 2，其中区间满足 $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty}[x_i,x_{i+1}]=I$.

[习题 2] 设 $F:[a,b]\to[a,b]$ 连续递增. 对任意自然数 $n\ge 2$ 和使得 $a<A<B<b$ 的实数 A,B，证明: F 存在 $[a,b]$ 上的 n 次连续迭代根 f，满足 $F(a)\le f(A)<f(B)\le F(b)$.

[习题 3] 证明定理 7. 提示: 利用定理 8 的结论.

[习题 4] 证明 (6.15).

第七章　嵌入流

映射 $F:I\to I$．如果存在 I 上的流（或半流）$\phi(t,x)$，使得 $\phi(1,x)=F(x),\ \forall x\in I$，则称 F 可*嵌入流*(embedding flow)，或可*嵌入半流* (embedding semiflow) $\phi(t,x)$．

$\phi(1,x)$ 称为流 ϕ 的时间 1- 映射．从一个流通过离散采样必可产生一个离散动力系统；然而，一个离散动力系统是否能嵌入一个流却是个问题．如果 F 可嵌入流 (或半流)$\phi(t,x)$，令 $F^{\alpha}(x)=\phi(\alpha,x)$, 这就给出了 F 的 α 次迭代，α 可取遍实数 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{R}_+$), 特别是可以是分数．例如 $F^{1/n}$ 就是 F 的 n 次迭代根．由流的定义，这样确定的分数次迭代就可以满足上述指数运算律．显然，映射可嵌入流 (半流)，成为映射可定义分数次迭代的充分条件．问题是，什么样的映射才能嵌入流 (或半流) 呢？

§7.1　嵌入流存在性

§1.1 有许多例子都可嵌入流．例如 $F(x)=x+b,\ F^n(x)=x+nb,\ n\in\mathbf{Z}$. 把 n 连续化，可得到流 $\phi(t,x)=x+tb,\ t\in\mathbf{R}$．例如 $F(x)=x^k,\ F^n(x)=x^{k^n}, n\in\mathbf{Z}_+$, 从而可得半流 $\phi(t,x)=x^{k^t},\ t\in\mathbf{R}_+$．我们还可得到一般的结论．

定理 1　$F\in CI(I,I),\ I=[a,b]$．则 F *可以嵌入 I 上的连续流．*

证明　证明的思想是建立 F 与 $x+1$ 的共轭关系．任取函数 $h_1:(a,b)\to\mathbf{R}$ 连续且严格单调．令

$$G(x)=h_1^{-1}(h_1(x)+1),\quad x\in(a,b)$$

显然 G 共轭于 $x+1$，它自然在 (a,b) 上无不动点. 由连续性, 可补充定义 $G(a)=a$, $G(b)=b$，使得 $G\in CI(I,I)$．我们将采用常用的逐段定义法证明 G 与 F 共轭，从而

$$F\sim G\sim x+1.$$

首先考虑 $F(x)>x$, $G(x)>x$ 的情形. 任取 $x_0\in(a,b)$，在 $[x_0,F(x_0)]$ 上定义函数

$$r_0(x)=F(x_0)+\frac{G(F(x_0))-F(x_0)}{F(x_0)-x_0}(x-x_0). \tag{7.1}$$

显然 $r_0(x)$ 连续递增，$r_0(x_0)=F(x_0)$, 且满足 $r_0\circ F(x_0)=G\circ F(x_0)=G\circ r_0(x_0)$．事实上，满足这一关系的 r_0 有多种定义法. 令

$$x_i=F^i(x_0),\ y_0=F(x_0),\ y_i=G^i(y_0),\quad i=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{7.2}$$

在递增函数 F, G 的当前假设情形下，序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 都递增，且当 $i\to-\infty$ 时都趋于 a; 而当 $i\to+\infty$ 时都趋于 b．如上已定义 $r_0(x)$, $x\in[x_0,x_1]$，再对 $i=1,2,\ldots$ 递归地定义

$$r_i(x)=G\circ r_{i-1}\circ F^{-1}(x),\quad x\in[x_i,x_{i+1}], \tag{7.3}$$

$$r_{-i}(x)=G^{-1}\circ r_{-i+1}\circ F(x),\quad x\in[x_{-i},x_{-i+1}]. \tag{7.4}$$

用归纳法可证明 $r_i(x)$ 和 $r_{-i}(x)$ 连续递增且满足

$$r_i(x_i)=y_i,\qquad r_i(x_{i+1})=y_{i+1}; \tag{7.5}$$

$$r_{-i}(x_{-i})=y_{-i},\qquad r_{-i}(x_{-i+1})=y_{-i+1}. \tag{7.6}$$

最后定义

$$h_2(x)=\begin{cases} x, & \text{当}x=a,\ b\text{时};\\ r_i(x), & \text{当}x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,\pm1,\pm2,\ldots\text{时}. \end{cases} \tag{7.7}$$

易验证 $h_2 \in CI(I,I)$, 且满足 $h_2 \circ F(x) = G \circ h_2(x)$, $\forall x \in I$.

关于 $F(x) < x$, $G(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$ 的情形，可如上讨论 $\tilde{F}(x) = -F(-x)$, $\tilde{G}(x) = -G(-x)$, $x \in (-b,-a)$, 而得到相应结论. 关于 $F(x) > x$, $G(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$ 的情形，可任取严格递减且映满的连续函数 $p : (a,b) \to (a,b)$ ，令 $\tilde{G}(x) = p^{-1} \circ G \circ p(x)$ ，按上述讨论过程，必有连续递增函数 $q(x)$, 使

$$q \circ F(x) = \tilde{G} \circ q(x) = p^{-1} \circ G \circ p \circ q(x),$$

从而 $h_2(x) := p(q(x))$ 满足要求. 关于 $F(x) < x$, $G(x) > x$, $\forall x \in (a,b)$ 的情形也是相似的.

以上证明了 G 与 F 共轭，即存在严格单调且映满的连续函数 h_2, 使得 $h_2 \circ F(x) = G \circ h_2(x)$, $\forall x \in I$. 令

$$h = h_1 \circ h_2,$$

易见

$$F(x) = h_2^{-1} \circ G \circ h_2(x) = h_2^{-1} \circ h_1^{-1}(h_1 \circ h_2(x) + 1) = h^{-1}(h(x) + 1),$$

从而我们建立了 F 与 $x+1$ 的共轭. 易验证

$$\phi(t,x) = h^{-1}(h(x) + t), \quad t \in \mathbf{R},\ x \in I,$$

是 I 上的流，而且 $F(x) = \phi(1,x)$ ，即 F 可嵌入连续流 ϕ . □

上述定理中，如果 $F(I) \subset I$ 为真子集，我们也有相应结论，但 F 嵌入的只是半流而不是流. 我们的结果表明，映射嵌入连续流方式不必是唯一的，但无论哪种方式的嵌入，都可以定义出映射的分数次迭代 [14] .

§7.2 嵌入流唯一性

有时，映射嵌入流的方式可以是唯一的.

定理 2 *在 §6.4 的定理 12 条件下，映射 F 能嵌入 J 上的一个 C^1 半流 $\phi(t,x)$，甚至当 $F(I)=I$ 时可嵌入一个 C^1 流 $\phi(t,x)$，而且嵌入方式是唯一的.*

证明 事实上，用 §6.4 的引理 3 所确定的函数 h 来定义连续可微函数

$$\phi(t,x)=h^{-1}(c^t h(x)),\quad c=F'(x_0),$$

易见 $\phi(1,x)=h^{-1}(ch(x))=F(x)$，即 ϕ 就是 F 所能嵌入的半流. 当 $F(I)=I$ 时 F 为 I 上的自同胚，如此定义的 ϕ 必为流.

为证明唯一性，设 $\Phi(t,x)$ 也是 F 可嵌入的连续可微半流，令

$$\Psi(t,x)=h(\Phi(t,h^{-1}(x))),$$

它显然也是连续可微半流. 从 (6.16) 知

$$\Psi(1,x)=h(\Phi(1,h^{-1}(x)))=h\circ F\circ h^{-1}(x)=cx,$$

即 $G(x)=cx$ 可嵌入 Ψ. 由半流的定义,

$$\begin{aligned}\Psi(t,cx)&=\Psi(t,G(x))=\Psi(t,\Psi(1,x))\\&=\Psi(t+1,x)=G(\Psi(t,x))=c\Psi(t,x).\end{aligned}$$

设 $\frac{d}{dx}\Psi(t,x)|_{x=0}=\alpha(t)$，易见

$$\begin{aligned}\Psi(t,x)&=\frac{\Psi(t,cx)}{c}=\frac{\Psi(t,c^n x)}{c^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\Psi(t,c^n x)}{c^n x}\right)x=\alpha(t)x.\end{aligned}\tag{7.8}$$

注意到

$$\underbrace{\Psi(1/n,\Psi(1/n,\cdots,\Psi}_{n}(1/n,x)\cdots))=\Psi(1,x)=G(x)=cx,$$

两边在 $x=0$ 处求导，得到 $\alpha(1/n)^n=c$. 同理， $\alpha(1/2n)^2=\alpha(1/n)$, 即 $\alpha(1/n)>0$ ，从而 $\alpha(1/n)=c^{1/n}$. 这就证明了对一切有理数 $p>0$ 有 $\alpha(p)=c^p$. 由连续性知，对一切实数 $t>0$, 有 $\alpha(t)=c^t$. 对实数 $t<0$ ，由 $\Psi(-t,\Psi(t,x))=x$ 知 $\alpha(t)=(\alpha(-t))^{-1}=c^t$. 从 (7.8) 得 $\Psi(t,x)=c^tx$. 再由 $\Psi(t,x)$ 的定义， $\Phi(t,x)=h^{-1}(c^th(x))=\phi(t,x)$, 因此嵌入是唯一的. □

§7.3 嵌入半流的映射

除了研究自同胚产生的动力系统嵌入流和光滑自映射嵌入光滑半流等问题以外，我们自然想知道一般连续自映射所生成的半动力系统能否嵌入连续半流.

下述结果揭示了可嵌入半流的半动力系统的若干性质.

定理 3 假设连续映射 $F:I\to I$ 可嵌入连续半流 $\phi(t,x)=F^t(x)$, $t\in\mathbf{R}_+$, $x\in I$, 那么 (i) F 的一切周期点都是 F 的不动点; (ii) ϕ 的一切周期点都是 F 的不动点, 反之亦然; 特别是, x_0 是 ϕ 的的不动点, 当且仅当 x_0 是 F 的不动点; (iii) 如果 $x_0\in I$ 且 $F(x_0)>x_0$(或 $<x_0$), 则 $\phi(\cdot,x_0)$ 单调不减(或不增); 进而, 如果 $p=\min\{x>x_0:\ F(x)=x\}$(或 $p=\max\{x<x_0:\ F(x)=x\}$), 或者当这种最小（大）值不能取到时 p 为区间 I 的右（或左）端点, 则当 $\phi(t,x_0)<p$ (或 $>p$ ）时 $\phi(t,x_0)$ 关于 t 严格递增（或递减）, 而且 $\lim_{t\to+\infty}\phi(t,x_0)=p$.

证明 设 $x_0 \in I$ 是 F 的 k- 周期点， $k > 1$. 考虑半流的轨道 $J = \{y:\ y = \phi(t, x_0),\ t \geq 0\}$ ，显然 $J \subset I,\ \phi(t, J) \subset J$. 对任意 $y = \phi(t, x_0) \in J$ ，

$$F^k(y) = \phi(k, y) = \phi(k, \phi(t, x_0)) = \phi(k + t, x_0)$$
$$= \phi(t, F^k(x_0)) = \phi(t, x_0) = y,$$

从 $F(y_1) = F(y_2)$ 可推出 $y_1 = F^{k-1}(F(y_1)) = F^{k-1}(F(y_2)) = y_2$ ，易见 F 在集合 J 上严格单调，于是 $F^{\frac{1}{2}} := \phi\left(\frac{1}{2}, \cdot\right)$ 在 J 上也严格单调，否则与上章 §6.3 非单调点的理论矛盾. 因为 $F^{\frac{1}{2}}(J) \subset J,\ F^{\frac{1}{2}} \circ F^{\frac{1}{2}} = F$ ，故 F 在 J 上严格递增，显然 F 在 J 上只能有 1- 周期点 (即不动点). 这与 x_0 的假设矛盾，因此 (i) 结论得证.

上述推理也表明，若 $\phi(t, x_0) = x_0$ 必有 $\phi(t/2^n, x_0) = x_0,\ n = 1, 2, \ldots$. 令 $\frac{1}{t}$ 的二进制表达式为

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_0 为非负整数， $a_n = 1$ 或 0 . 于是由连续性，对任意正整数 m 有

$$F(x_0) = \phi(1, x_0) = \lim_{m \to \infty} \phi\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n t}{2^n}, x_0\right) = x_0.$$

从而 (ii) 结论得证，其中结论的另一面通过交换 $\phi(1, x_0)$ 与 $\phi(t, x_0)$ 的地位同理可证.

关于 (iii) ，假设 $F(x_0) > x_0$ ，另一关于 $F(x_0) < x_0$ 的情形同理可证. 如果存在 $t_1 > 0$ 使 $\phi(t_1, x_0) < x_0$ ，由连续性，必存在 $t_2 > 0$ 使

$\phi(t_2,x_0)=x_0$ ，由 (ii) 的结论知 $F(x_0)=x_0$ ，这与假设矛盾. 因此

$$\phi(t,x_0)>x_0,\quad \forall t>0. \tag{7.9}$$

我们讨论的第一种情况是 $\phi(t,x_0)$ 对某个 t 会等于或超过 p ，按 p 的假设和连续性，必存在 t^* 使 $\phi(t^*,x_0)=p$. 我们可以肯定

$$\phi(t,x_0)=p,\quad \forall t\ge t^*. \tag{7.10}$$

因为 $F(p)=p$ ，由 (2°) 知 $\phi(t^*+t,x_0)=\phi(t,p)=p,\ \forall t\ge 0$. 往下再考虑第二种情况： $x_0\le\phi(t,x_0)<p,\ \forall t\in[0,+\infty)$ ，这时 F 在 $[x_0,p)$ 上是连续自映射且无不动点， $F(x)>x,\ \forall x\in[x_0,p)$. 同证明 (7.9) 一样，可见

$$\phi(t,x)>x,\quad \forall t>0,\ x\in[x_0,p).$$

那么，对 $\forall\delta>0$ 有 $\phi(t+\delta,x)=\phi(\delta,\phi(t,x))>\phi(t,x)$ ，从而对所有 $x\in[x_0,p)$, 函数 $\phi(t,x)$ 关于 t 严格递增. 显然，在以上两种情形下，$\phi(t,x_0)$ 关于 t 至少单调不减. 进而，在第二种情况下我们有单调的严格性，事实上，若不然，则有 $t_2>t_1$ 使 $\phi(t_2,x_0)=\phi(t_1,x_0)\in[x_0,p)$ ，令 $y_0=\phi(t_1,x_0),\ s=t_2-t_1>0$ ，这样我们有 $\phi(s,y_0)=y_0$ ，由 (ii) 知 $F(y_0)=y_0$ ，这与 F 在 $[x_0,p)$ 内无不动点矛盾. 最后，由这种严格递增性， $\lim_{t\to+\infty}\phi(t,x_0)=z_0\le p$ ，显然 $f(z_0)=\lim_{t\to+\infty}\phi(t+1,x_0)=z_0\le p$ 但 $[x_0,p)$ 上无不动点，故 $z_0=p$. 特别，在第一种情况下，这个极限结果是平凡的. □

§7.4 嵌入半流的条件

定理 4 *连续映射 $F:I=[a,b]\to I$ 满足 $F(a)=a,\ F(b)=b,\ F(x)>x,\ \forall x\in(a,b)$; 而且存在 $c\in(a,b]$ 使得 $F|_{[a,c]}$ 严格递增而*

$F|_{[c,b]}$ 恒为常值，那么 F 可嵌入连续半流.

证明 当 $c=b$ 时， $F\in CI(I,I)$ 为自同胚，从而 §7.1 定理 1 已给出嵌入连续流的结论. 往下讨论 $c<b$ 的情形. 易见 $[0,1]$ 上的连续自映射

$$g(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1/2],\\ 1, & x\in[1/2,1],\end{cases}$$

可嵌入连续半流 $\phi: R_+\times[0,1]\to[0,1]$,

$$\phi(t,x)=\begin{cases}2^t x, & x\in[0,1/2^t],\\ 1, & x\in[1/2^t,1].\end{cases}$$

我们只要证明 F 与 g 拓扑共轭即可. 事实上，对 $x\in[c,b]$ 取 $h(x)$ 为任意满足 $h(c)=1/2$, $h(b)=1$ 的严格递增连续函数，例如

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b-c}+1\right),\quad c\le x\le b.$$

由于 $F|_{[a,c]}$ 严格递增，令 $x_0=c$, $x_{n+1}=F^{-1}(x_n)$, $n=0,1,2,\dots$ ，显然 $x_{n+1}<x_n$, $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. 那么，在 $[x_1,x_0]$ 上任取 $h(x)$ 为满足 $h(x_1)=1/4$, $h(x_0)=1/2$ 的严格递增连续函数. 对 $\forall n\ge 1$ ，设在 $[x_n,x_{n-1}]$ 上已经定义了严格递增连续函数 $h(x)$, 满足

$$h(x_n)=1/2^{n+1},\quad h(x_{n-1})=1/2^n,$$

则用

$$h(x)=g^{-1}\circ h\circ F(x),\quad x\in[x_{n+1},x_n]$$

可归纳地定义下一段 $[x_{n+1},x_n]$ 上的 $h(x)$ 值. 最后令 $h(a)=0$ ，这样定义的 $h:[a,b]\to[0,1]$ 显然是个同胚，而且满足 $h^{-1}\circ g\circ h=F$. 拓扑共轭关系得证. □

我们可以证明一个更一般的结果.

定理 5 *区间 I 上连续自映射 F 可嵌入连续半流的充分必要条件是: (i) F 在 I 上单调不减, 而且 (ii) 如果 $x_1 \neq x_2$ 使 $F(x_1) = F(x_2) = x^*$, 则 x^* 是 F 的不动点.*

证明 先证必要性. 令 E 是 F 全体不动点之集, 则 $I\backslash E$ 由一些互不相交的区间 Δ 构成. 由定理 3 知, $F(x) - x$ 在每个 Δ 上不变号且 $F(\Delta) \subset \bar{\Delta}$. 现在考虑 $x_2 > x_1, \in \Delta$, 当 $F(x) - x > 0, \forall x \in \Delta$ (或 $F(x) - x < 0, \forall x \in \Delta$) 时必有 $\tau > 0$ 使 $\phi(\tau, x_1) = x_2$ (或 $\phi(\tau, x_2) = x_1$), 从而 $F(x_2) = F(\phi(\tau, x_1)) \geq F(x_1)$ (或 $F(x_1) = F(\phi(\tau, x_2)) \leq F(x_2)$), 即 F 单调不减. 注意到, 上述不等式中的等号仅当 $F(x_1)$ (或 $F(x_2)$) 是 F 的不动点时成立.

再证充分性. 不妨设 I 的两端点皆 F 不动点, 否则可开拓 F 的定义域使两端点皆不动点, 嵌入某个流后再取其限制. 在此假设下, $I\backslash E$ 的每个构成区间 Δ 之两端点皆 F 的不动点, 而且 F 只能在 Δ 的至多一个端点附近取常值. 如果 $F(x) - x > 0, \forall x \in \Delta$, 由定理 4 , 它显然可以在 Δ 上嵌入连续半流. 如果 $F(x) - x < 0, \forall x \in \Delta = [u, v]$, 则 $\tilde{F}(x) = u + v - F(u + v - x)$ 满足定理 4 的要求并可嵌入 Δ 上连续半流, 从而 F 也可. 最后, 很容易将每段 Δ 上的连续半流拼接成 I 上的连续半流. □

有关嵌入流理论的进一步结果, 如嵌入连续半流和嵌入拟半流等等, 参见 [57] .

[习题 1] 写出 $F(x) = \sqrt[k]{ax^k + b}$ 所能嵌入的流.

[习题 2] 只满足半流定义中条件 (ii) 的映射 $\phi(t, x) : \mathbf{R}_+ \times X \to X$ 称为 X 上的一个 *拟半流* . 证明: 只要 F 能嵌入连续拟半流, 它就一定有任意 n 次迭代根.

[习题 3] 记 U_t 为连续拟半流 $\phi(t,x)$ 关于 x 的单调点之全体构成的集合，A_t，B_t 分别为半流 $\phi(t,x)$ 在 $x \in [a,b]$ 的下确界和上确界. 证明： (i) $U_{t_1} \supset U_{t_2}$，$A_{t_1} \le A_{t_2} \le B_{t_2} \le B_{t_1}$，$\forall t_2 > t_1 \ge 0$. (ii) 如果 $\phi(1,x) \in S(I,I)$，$I = [a,b]$，则对每个固定的 $t > 0$，$U_t = U_1$ 且 $\phi(t,x) \in S(I,I)$． (iii) 如果 $\phi(1,x) \in S(I,I)$，$I = [a,b]$，则存在子区间 $[\tilde{a},\tilde{b}] \subset [a,b]$ 使得，对每个固定的 $t > 0$，$\phi(t,x)$ 在子区间 $[\tilde{a},\tilde{b}]$ 上严格递增而且 $\tilde{a} \le A_t < B_t \le \tilde{b}$．

[习题 4] $F \in S(I,I)$，$I = [a,b]$．证明 F 可嵌入 I 上连续半流的充分必要条件是 F 在 I 上严格递增.

[习题 5] 设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上任意一个具有小于 1 的 Lipschitz 常数且周期为 1 的连续函数. $G(x) = x + g(x)$．证明： (i) $\Phi(t,x) = G^{-1}(G(x)+t)$ 是一个流； (ii) $\mathbf{R}$ 上的自同胚 $F(X) = x + 1$ 可以嵌入到这个流中.

第八章　迭代方程

有了一种运算就自然会有一种方程问题的出现. 有了映射的迭代, 以迭代为基本运算形式的方程就称为 迭代方程(iterative equation) . 一个 n 次迭代方程的基本形式是

$$G(f(x), f^2(x), ..., f^n(x)) = F(x), \quad x \in I = [a, b], \tag{8.1}$$

其中 f^i 是 f 的 i 次迭代. 当 G 是线性函数时 (8.1) 成为

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + ... + \lambda_n f^n(x) = F(x), \quad x \in I = [a, b], \tag{8.2}$$

称为 线性迭代方程 . 迭代根问题就是其特殊情形. 如果 (8.2) 中 $F(x) = -\lambda_0 x$, 方程成为

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + ... + \lambda_n f^n(x) = 0, \ \ x \in I = [a, b], \tag{8.3}$$

称为 齐次线性迭代方程 . 本章主要讨论线性迭代方程.

§8.1　解的存在性

法国数学家 J.G.Dhombres[11] 在 1977 年就讨论过迭代方程

$$f^2(x) = af(x) + (1-a)x.$$

稍一般的情形

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) - F(x), \quad x \in I = [a, b], \tag{8.4}$$

在 1983 年得到解决 [68] . 人们也力图对更一般情形给出结论, 由于过去大都采用逐段定义或序列逼近的方法, 因此, 关于 n 次迭代方程

(8.2) 只是就很特殊的情况或齐次情形 (8.3) 获得了结果 [35],[32]．直到 1986 年关于一般形式的 (8.2) 才有了结论 [59]．

通常我们可以假设 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$，即所谓 *规范化假设*．事实上，我们只要对方程除以因子 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 就可以自然地作出这样的假设.

定理 1 (存在性) *考虑迭代方程 (8.2)，其中*

$$\textbf{(H)} \qquad \lambda_1 > 0, \lambda_i \geq 0,\ i = 2, 3, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1.$$

并且 $F : I \to I$ *连续,* $F(a) = a, F(b) = b$，*还满足* $0 \leq F(x_1) - F(x_2) \leq M(x_1 - x_2)$, $\forall x_1 > x_2 \in I$，*这里* $M \geq 1$．*那么方程 (8.2) 存在连续解* $f : I \to I$，*它满足* $f(a) = a, f(b) = b$ *和* $0 \leq f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{M}{\lambda_1}(x_1 - x_2)$, $\forall x_1 > x_2 \in I$．

记 $C(I)$ 为定义在 $I = [a, b]$ 上的连续实函数的全体, $C(I, I) = \{f \in C(I) : a = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = b, \forall x \in I\}$, $X(I; m, M) = \{f \in C(I, I) : m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x),\ \forall a \leq x \leq y \leq b\}$, 其中 $0 \leq m \leq 1 \leq M$． $C(I)$ 关于范数 $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in I\}$ 是一个 Banach 空间. 为了简化表达，我们只需对 $I = [0, 1]$ 证明定理.

引理 1 *令* $0 \leq m \leq 1 \leq M$． $X(I; m, M)$ *是* $C(I)$ *的紧凸子集.*

证明 显然, $X(I; m, M)$ 是 $C(I)$ 的有界闭凸子集. 容易验证在 $X(I; m, M)$ 内的函数是一致等度连续的. 根据 Ascoli-Arzèla 引理, $X(I; m, M)$ 为 $C(I)$ 的紧凸子集. □

引理 2 *设* $0 < m \leq 1 \leq M$, *且* $f, g \in X(I; m, M)$, *那么*

(i) $\|f^n - g^n\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} M^j \|f - g\| \quad \forall n = 0, 1, 2, ...;$

(ii) $f^{-1} \in X(I; M^{-1}, m^{-1});$

(iii) $\|f - g\| \leq M\|f^{-1} - g^{-1}\|;$

(iv) $\|f^{-1} - g^{-1}\| \leq m^{-1}\|f - g\|.$

证明 当 $n=0$ 或 $n=1$ 时, (i) 是平凡的. 如果 (i) 对 $n=k$ 成立,

$$
\begin{aligned}
&|f^{k+1}(x)-g^{k+1}(x)| = |f(f^k(x))-g(g^k(x))| \\
&\le |f(f^k(x))-f(g^k(x))| + |f(g^k(x))-g(g^k(x))| \\
&\le M\|f^k-g^k\| + \|f-g\| \\
&\le M\left(\sum_{j=0}^{k-1} M^j\right)\|f-g\| + \|f-g\| \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k} M^j\right)\|f-g\|,
\end{aligned}
$$

用归纳法可证得 (i) .

由于 $m>0$, f 为 I 上的保向同胚, 而且对 $0\le x<y\le 1$,

$$
M^{-1} \le \frac{y'-x'}{f(y')-f(x')} \le m^{-1},
$$

其中 $y'=f^{-1}(y)$, $x'=f^{-1}(x)$, 从而 (ii) 得证.

为证明 (iii) , 我们注意到,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-g(x)| &= |f(x)-f((f^{-1}\circ g)(x))| \le M|x-f^{-1}(g(x))| \\
&= M|g^{-1}(g(x))-f^{-1}(g(x))| \le M\|g^{-1}-f^{-1}\|.
\end{aligned}
$$

从而 $\|f-g\|\le M\|g^{-1}-f^{-1}\| = M\|f^{-1}-g^{-1}\|$. 结论 (iv) 从 (ii) 、 (iii) 可得到. □

以下结果的证明是平凡的.

引理 3 设 $0\le m\le 1\le M$, $0\le s\le 1\le S$. 如果 $f\in X(I;m,M)$, $g\in X(I;s,S)$, 那么 $f\circ g\in X(I;ms,MS)$.

定理 1 的证明 构造映射 $L: X(I;0,M/\lambda_1) \to C(I)$, 使得

$$Lf(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \ldots + \lambda_n f^{n-1}(x). \quad f \in X(I;0,M/\lambda_1) \tag{8.5}$$

易见 $0 \le Lf(x) \le 1$, $Lf(0) = 0$, $Lf(1) = 1$．对 $x_1 > x_2$,

$$\begin{aligned} Lf(x_1) - Lf(x_2) &= \lambda_1(x_1 - x_2) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (f^{i-1}(x_1) - f^{i-1}(x_2)) \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{M}{\lambda_1}\right)^{i-1} (x_1 - x_2) := M_0(x_1 - x_2), \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} Lf(x_1) - Lf(x_2) &= \lambda_1(x_1 - x_2) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (f^{i-1}(x_1) - f^{i-1}(x_2)) \\ &\ge \lambda_1(x_1 - x_2) > 0. \end{aligned} \tag{8.7}$$

因此 $Lf \in X(I;\lambda_1, M_0)$，且为 I 上的保向同胚. 由引理 2, 其逆 $\mathcal{I}Lf \in X(I;M_0^{-1},\lambda_1^{-1})$．最后定义映射 $\prod : X(I;0,M/\lambda_1) \to C(I)$ 使得

$$\prod f(x) = \mathcal{I}Lf \circ F(x), \quad \forall f \in X(I;0,M/\lambda_1). \tag{8.8}$$

易见，$\prod f(0) = 0, \prod f(1) = 1$，且对 $x_1 > x_2$，

$$\begin{aligned} 0 \le \prod f(x_1) - \prod f(x_2) &= \mathcal{I}Lf \circ F(x_1) - \mathcal{I}Lf \circ F(x_2) \\ &\le \frac{1}{\lambda_1}(F(x_1) - F(x_2)) \le \frac{M}{\lambda_1}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

因此

$$\prod(X(I;0,M/\lambda_1)) \subset X(I;0,M/\lambda_1).$$

进而，对 $f_1, f_2 \in X(I;0,M/\lambda_1)$， 用引理 2，

$$\begin{aligned}\|\prod f_1-\prod f_2\| &= \|\mathcal{I}Lf_1\circ F-\mathcal{I}Lf_2\circ F\|=\|\mathcal{I}Lf_1-\mathcal{I}Lf_2\|\\ &\le \lambda_1^{-1}\|Lf_1-Lf_2\|\le\lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\|f_1^i-f_2^i\|\\ &\le \lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f_1-f_2\|.\end{aligned}\tag{8.9}$$

因此，$\prod$ 是 $X(I;0,M/\lambda_1)$ 上的连续映射. 由引理 1 ，$X(I;0,M/\lambda_1)$ 是 $C(I)$ 的一个紧凸子集,根据 Schauder 不动点定理,存在 $f\in X(I;0,M/\lambda_1)$，使得 $f(x)=\prod f(x)$，即 $Lf\circ f(x)=F(x)$． 从而 f 为 (8.2) 的一个连续解. □

该定理可简述为：设方程 (8.2) 满足条件 (H), 且 $M\ge 1$，如果 $F\in X(I;0,M)$，那么方程 (8.2) 存在连续解 $f\in X(I;0,M/\lambda_1)$．

§8.2 唯一性与稳定性

定理 2 (唯一性) *假设定理 1 条件满足，此外，*

$$\lambda_1>\frac{1}{1+(\sum_{j=1}^n M^{j-1})^{-1}},\tag{8.10}$$

那么方程 (8.2) 在 $X(I;0,M/\lambda_1)$ 有唯一解.

证明 由 (8.9) ,

$$\begin{aligned}\|\prod f_1-\prod f_2\| &\le \lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f_1-f_2\|\\ &\le \gamma\|f_1-f_2\|,\end{aligned}\tag{8.11}$$

其中 (8.10) 意味着

$$\gamma:=\lambda_1^{-1}(1-\lambda_1)\sum_{j=1}^{n}M^{j-1}<1.\tag{8.12}$$

因此 $\prod$ 是闭子集 $X(I;0,M/\lambda_1)$ 上的压缩映射，用 Banach 压缩映象原理知，映射 $\prod$ 在 $X(I;0,M/\lambda_1)$ 中存在唯一不动点，从而证明了解的唯一性. □

用 Banach 压缩映象原理证明唯一性的过程，实际上给出了一个对方程 (8.2) 解的递推近似计算法. 事实上，由映射 $\prod$ 的定义，对任意选定的初函数 $f_0 \in X(I;0,M/\lambda_1)$, 我们如下

$$f_{k+1}(x) = \mathcal{I}Lf_k \circ F(x)$$

定义函数序列 $\{f_{k+1}(x)\}$. 可以证明它一致收敛.

定理 3 (稳定性) *在定理 2 条件下方程 (8.2) 的解 f 是稳定的，即 f 连续地依赖于已知函数 F.*

证明 令 $F,G \in X(I;0,M)$. 由定理 2，方程 (8.2) 分别对应已知函数 F,G, 唯一地确定解 $f,g \in X(I;0,M/\lambda_1)$，即

$$f(x) = \mathcal{I}Lf \circ F(x), \qquad g(x) = \mathcal{I}Lg \circ G(x).$$

因而，由上节的引理 2 (iv)，

$$\begin{aligned}
\|f-g\| &= \|\mathcal{I}Lf\circ F - \mathcal{I}Lg\circ G\| \\
&\le \|\mathcal{I}Lf\circ F - \mathcal{I}Lg\circ F\| + \|\mathcal{I}Lg\circ F - \mathcal{I}Lg\circ G\| \\
&\le \|\mathcal{I}Lf - \mathcal{I}Lg\| + \lambda_1^{-1}\|F-G\| \\
&\le \lambda_1^{-1}(\|Lf - Lg\| + \|F-G\|) \\
&\le \lambda_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\|f^i - g^i\| + \|F-G\|\right) \\
&\le \lambda_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f-g\| + \|F-G\|\right) \\
&\le \gamma\|f-g\| + \lambda_1^{-1}\|F-G\|.
\end{aligned}$$

由 (8.10) 和 (8.12)， $\gamma < 1$，因此

$$\|f-g\| \le \frac{1}{(1-\gamma)\lambda_1}\|F-G\|. \tag{8.13}$$

从而稳定性得证. □

如果已知函数严格递增，具体地说，如果 $F \in X(I;\delta,\lambda_1 M)$，其中 $\delta > 0,\ M > 0,\ \lambda_1 M > \delta$，还可给出另一种唯一性条件 [59]: 当

$$\lambda_1 \ge 1 - \delta / \left(\sum_{i=1}^{n-1} M^i\right)$$

时，方程 (8.2) 在 $X(I;0,M)$ 存在唯一解，且该解连续依赖于已知函数. 特别是对 $n=2$ 的情形，唯一性条件是一个容易验算的表达式: $\lambda_2 \le \delta/M$． 在 [66] 实际上还证明了解对方程系数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 的连续依赖性.

§8.3 解的若干性质

关于解的光滑性和解析性，我们还有以下结论.

定理 4 (光滑性)([61]) $F: I \to I$ 连续可微，$F(a)=a, F(b)=b$，且

$$\delta \le F'(x) \le \lambda_1 M, \quad \forall x \in I,$$

$$|F'(x_1) - F'(x_2)| \le M'|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1 > x_2 \ \in I,$$

其中 δ, M 为正数，λ_1 为方程中已给定的系数. 如果方程系数满足

$$\lambda_1 > K_0 M^2, \quad K_0 := \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j+1}\left(\sum_{i=j-1}^{2j-2} M^i\right),$$

那么方程 (8.2) 存在连续可微的解 $f: I \to I$, 它满足 $f(a)=a, f(b)=b$, $0 \le f'(x) \le M$, $\forall x \in I$ 和

$$|f'(x_1)-f'(x_2)| \le M'/(\lambda_1 - K_0M^2)|x_1-x_2|, \quad \forall x_1 > x_2, \in I.$$

在复数域中考虑方程

$$\lambda_1 f(z) + \lambda_2 f^2(z) + \ldots + \lambda_n f^n(z) = F(z), \quad z \in \mathbf{C}, \tag{8.14}$$

其中 f^i 表示 f 的第 i 次迭代, $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $i=1,2,\ldots,n$ 不全为 0 .

定理 5 (解析性)([45]) 设 $F(0)=0$, $F'(0)=s$, $F(z)$ 在 $|z|<r_1$ 上解析，其幂级数展开式为

$$F(z) = sz + \sum_{m=2}^{\infty} c_m z^m.$$

α 是代数方程

$$\lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_n z^n - s = 0$$

的根，且有正数 β 使得对任意自然数 $m \ge 2$, 有

$$|\lambda_1 \alpha^m + \lambda_2 \alpha^{2m} + \ldots + \lambda_n \alpha^{nm} - s| \ge \beta,$$

那么存在 $r>0$ 使方程 (8.14) 在 $|z|<r$ 内存在解析解.

映射的对称性通常用等变性来描述 [16],[17] . 设 Γ 线性空间 X 上的一些线性变换组成的紧 Lie 群，如果映射 $f: X \to X$ 满足

$$f(\gamma x) = \gamma f(x), \quad \forall x \in X, \quad \gamma \in \Gamma,$$

则称 f 是 Γ-等变的 . 例如奇函数是关于 $\mathbf{Z}_2 = \{1,-1\}$ 等变的. 显然对任何群来说恒同映射 id 总是等变的. 特别是，迭代保持等变性，即

如果 $f: X \to X$ 是 Γ- 等变的，则迭代 f^i 也是 Γ- 等变的. 实直线 $\mathbf{R}$ 上的可逆线性变换都形如 $x \mapsto \gamma x$, 其中 $0 \neq \gamma \in \mathbf{R}$, 因此这类变换构成的 Lie 群同构于 $GL(\mathbf{R})$ 的一个子群. $GL(\mathbf{R})$ 是非零实数的乘法拓扑群，因此可简记为 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}\backslash 0$, 它是一个交换群. 设子群 $\Gamma \subset GL(\mathbf{R})$ 的生成元集合为 $V \subset \mathbf{R}_0$，称 V 为 Γ 的 *生成集* 并记 $\Gamma = \langle V \rangle$. 如果 V 是有限集，则称 Γ 是 *有限生成* 的. V 称为是 *极小* 的，如果它没有真子集能生成 Γ. 不难证明：有限生成的群必有极小生成集；如果 V 极小，则 $1 \notin V$, 并且对 $\gamma \in V$ 必定 $\gamma^i \notin V$, $i \neq 1$.

令 $I = [-1, 1]$. 对子群 $\Gamma \subset GL(\mathbf{R})$，记 $\mathcal{F}_\Gamma(I)$ 为 $C(I)$ 中对 $\forall \gamma \in \Gamma$, $x, \gamma x \in I$ 满足 $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ 的函数 f 的集合. 记 $\mathcal{F}_\Gamma(I; m, M) = X(I; m, M) \cap \mathcal{F}_\Gamma(I)$, 其中 $M \geq 1 \geq m \geq 0$ 是常数, $X(I; m.M)$ 如 §8.1 定义. 当 Γ 有限生成时，可以证明：$\mathcal{F}_\Gamma(I)$ 是 $C(I)$ 的闭凸子集. 从而 $\mathcal{F}_\Gamma(I; m, M)$ 是 $C(I)$ 的紧凸子集.

定理 6 (**对称性**)([65]) *考虑迭代方程 (8.2)，其中系数满足假设* (**H**). *假设 Γ 是作用在 $\mathbf{R}$ 上的一个有限生成 Lie 群，$M > 1$. 如果函数 $F \in \mathcal{F}_\Gamma(I; 0, M)$，那么迭代方程 (8.2) 存在一个解 $f \in \mathcal{F}_\Gamma\left(I; 0, \frac{M}{\lambda_1}\right)$.*

定理 6 表明，方程 (8.2) 存在与已知函数 F 具有同样对称性的连续解.

§8.4 特征理论

齐次线性迭代方程 (8.3) 可以写成

$$f^n(x) = a_{n-1} f^{n-1}(x) + a_{n-2} f^{n-2}(x) + \dots + a_0 x, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{8.15}$$

如果形式地考虑一个线性解

$$f(x) = rx, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{8.16}$$

其中 $r \in \mathbf{C}$ 待定，那么将它代入方程可以得到

$$r^n - a_{n-1}r^{n-1} - \dots - a_1 r - a_0 = 0. \tag{8.17}$$

我们称 (8.17) 为方程 (8.15) 的 *特征方程* ，其左边的多项式称为 *特征多项式* 并记为 $P_n(r)$ ，其根为 *特征根* ，对应的解 (8.16)称为 *特征解* .

下面的结果刻划了特征根与方程解的关系. 它首先在 1989 年被 J.Matkowski [32] 提出，但直到最近才获得证明 [34] .

定理 7 *假设多项式*

$$Q(r) = r^k - b_{k-1}r^{k-1} - \dots - b_1 r - b_0,$$
$$P(r) = r^n - a_{n-1}r^{n-1} - \dots - a_1 r - a_0,$$

$r \in \mathbf{C}$, $k \le n$ ，满足 $Q|P$ ，即 Q 整除 P . 如果函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是迭代方程

$$f^k(x) = b_{k-1}f^{k-1}(x) + b_{k-2}f^{k-2}(x) + \dots + b_0 x, \quad x \in \mathbf{R} \tag{8.18}$$

的解，那么 f 也必为迭代方程

$$f^n(x) = a_{n-1}f^{n-1}(x) + a_{n-2}f^{n-2}(x) + \dots + a_0 x, \quad x \in \mathbf{R} \tag{8.19}$$

的解.

根据多项式根与系数的关系，方程 (8.15) 可等价地写成

$$f^n(x) - (\sum_{i=1}^{n} r_i) f^{n-1}(x) + (\sum_{i<j}^{n} r_i r_j) f^{n-2}(x) + \dots + (-1)^n r_1 r_2 \dots r_n x = 0, \tag{8.20}$$

其中 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 是多项式 $P_n(r)$ 的 n 个复根. 简记 (8.20) 左端的函数

为 $F_n(r_1,r_2,...,r_n)f(x)$, 并简称为方程 (8.20) 的 n-形式，它被 n 个复数 $r_1,r_2,...,r_n$ 唯一地确定.

引理 4 对固定的复数 $r_1,r_2,...,r_n$ 和 r_{n+1}, 若 $F_n(r_1,r_2,...,r_n)f \equiv 0$, 那么 $F_{n+1}(r_1,...,r_n,r_{n+1})f \equiv 0$.

证明 $F_n(r_1,r_2,...,r_n)f \equiv 0$ 表明 f 满足方程 (8.20)，故

$$
\begin{aligned}
f^{n+1}(x) &= f^n(f(x)) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} r_i)f^n(x) - (\sum_{i<j}^{n} r_i r_j)f^{n-1}(x) + ... \\
&\quad +(-1)^{n+1} r_1 r_2 ... r_n f(x), \quad x \in \mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{8.21}
$$

这样, 对所有 $x \in \mathbf{R}$ 如上定义的 $(n+1)$- 形式满足

$$
\begin{aligned}
&F_{n+1}(r_1,...,r_n,r_{n+1})f(x) \\
&= f^{n+1}(x) - (\sum_{i=1}^{n+1} r_i)f^n(x) + (\sum_{i<j}^{n+1} r_i r_j)f^{n-1}(x) \\
&\quad +... + (-1)^{n+1} r_1 r_2 ... r_{n+1} x \\
&= (\sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n+1} r_i)f^n(x) - (\sum_{i<j}^{n} r_i r_j - \sum_{i<j}^{n+1} r_i r_j)f^{n-1}(x) \\
&\quad +... + (-1)^{n+1} r_1 r_2 ... r_{n+1} x \\
&= -r_{n+1} f^n(x) + r_{n+1}(\sum_{i=1}^{n} r_i)f^{n-1}(x) - r_{n+1}(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j)f^{n-2}(x) \\
&\quad +... + (-1)^{n+1} r_1 r_2 ... r_{n+1} x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -r_{n+1}((\sum_{i=1}^{n} r_i)f^{n-1}(x) - (\sum_{i<j}^{n} r_i r_j)f^{n-2}(x) \\
&\quad +\dots+(-1)^{n+1} r_1 r_2 \dots r_n x) \\
&\quad +r_{n+1}(\sum_{i=1}^{n} r_i)f^{n-1}(x) - r_{n+1}(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j)f^{n-2}(x) \\
&\quad +\dots+r_{n+1}(-1)^{n+1} r_1 r_2 \dots r_n x \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

定理 7 的证明 令 $r_1, r_2, ..., r_n$ 为 P 的 n 个复根. 由于 $Q|P$，不妨设 $r_1, ..., r_k$, $k \le n$, 是 Q 的 k 个根. 如果函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是迭代方程 (8.18) 的解，则

$$F_k(r_1, r_2, ..., r_k)f = 0.$$

根据引理 4, f 也满足

$$F_{k+1}(r_1, ..., r_k, r_{k+1})f = 0.$$

从而归纳地证明了 $F_n(r_1, r_2, ..., r_n)f = 0$, 即 f 满足方程 (8.19). □

如果 $Q|P$ 而 $Q \ne P$, n 次方程 (8.19) 确有可能存在不满足 k 次方程 (8.18) 的解. 事实上，如果 P 的所有根 $r_1, r_2, ..., r_n$ 都是实根且 $r_1, r_2, ..., r_k$ 是 Q 的根，$k < n$，那么 $f(x) = r_i x$, $x \in \mathbf{R}$, $i = k+1, ..., n$ 都是满足 (8.19) 但都不是 (8.18) 的解.

特征理论的主要问题是方程的任意一个解能否被方程的特征解表示出来？以怎样的形式表示出来？这个问题对 $n=2$ 的情形已经有了较完整的结果，参见 [33] 、 [30] 和 [36] . 然而对一般的 n 次方程仍是个十分艰难而又重要的问题，尤其当方程具有重特征根的时候. 尽管如此， Matkowski 和张伟年在 [34] 就若干情形给出了进一步的结果.

§8.5 相关函数方程问题

方程 (8.2) 的形式可以推广为变系数形式

$$\lambda_1(x)f(x)+\lambda_2(x)f^2(x)+...+\lambda_n(x)f^n(x)=F(x), \tag{8.22}$$

其中 $x\in I=[0,1]$，连续函数 $F:I\to I$ 满足 $F(a)=a,\ F(b)=b$，系数 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n:I\to[0,1]$ 是连续函数，且满足规范化条件 $\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)=1,\ \forall x\in I$． [66] 通过构造映射族证明了如下结果.

定理 8 假设 $\lambda_1,...,\lambda_n:I\to I$ 连续，$\lambda_1(x)\geq c,\ \lambda_k(x)\geq 0,\ \forall x\in I,\ k=2,3,...,n$，且对 $\forall k=1,2,...,n,$

$$\mathrm{Lip}\lambda_k:=\sup\left\{\frac{|\lambda_k(y)-\lambda_k(x)|}{y-x}:0\leq x<y\leq 1\right\}\leq\beta,$$

其中 $c,\ \beta$ 为实常数， $0<c<1$ 且 $\beta\leq\frac{1}{n}$．如果 $F\in X(I;\delta,M)$，其中 $\delta\leq 1\leq M,\ \delta\geq n\beta$，那么迭代方程 (8.22) 在 $X\left(I;0,\dfrac{M+n\beta}{c}\right)$ 中存在解.

关于更一般的方程形式 (8.1)，司建国 [46],[47] 研究了

$$G(f(x),f^{n_1}(x),...,f^{n_k}(x))=F(x),\quad x\in I=[a,b], \tag{8.23}$$

其中 $n_i\geq 2,\ i=1,...,k,\ f^0(x)=x,\ f^k(x)=f\circ f^{k-1}(x)$．假设：

(H1) $G:I^{k+1}=I\times...\times I\to I$ 连续， $G(a,...,a)=a,G(b,...,b)=b$；

(H2) 存在常数 $c_0>0,\ c_i\geq 0,\ i=1,2,...,k$ 和 $C_i>0$, 使得对任意 $y_i\geq\tilde{y}_i,\ i=0,1,...,k,$ 有

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(y_i - \tilde{y}_i) \le G(y_0, y_1, ..., y_k) - G(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_k)$$

$$\le \sum_{i=0}^{k} C_i(y_i - \tilde{y}_i).$$

定理 9 *设方程 (8.23) 满足假设 (H1) 和 (H2)，常数 $M > 0$. 若 $F \in X(I; 0, c_0 M)$ ，那么方程 (8.23) 存在连续解 $f \in X(I; 0, M)$. 进而，如果*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \left(Q(n_i - 1) \sum_{j=1}^{n_i - 2} M^j + 1 \right) < c_0,$$

其中 $Q(1) = 0, Q(s) = 1, s = 2, 3, ...,$ 那么上述解唯一确定，并连续依赖于已知函数 F 和 G .

有关迭代方程的递归解法、迭代不等式及其应用的结果参见 [22] 、 [23] 、 [38] 和 [48] .

迭代函数方程 就是由未知函数和复合运算构成的恒等式. 通常，在不至发生混淆时，也将它简称为 *函数方程* . 函数方程的形式多种多样，包括 Schröder 方程

$$h(F(x)) = ch(x)$$

和 Abel 方程

$$h(f(x)) = h(x) + b,$$

它们在 Hartman 线性化和嵌入流的理论中扮演非常重要的角色. 此外，讨论拓扑共轭关系的方程

$$h(F(x)) = G(h(x)),$$

幂函数化的 Böttcher 方程

$$h(F(x)) = (h(x))^p$$

以及更一般的

$$F(x, h(x), h(f_1(x)), ..., h(f_n(x))) = 0$$

都是人们所关心的.

应该指出的是，许多函数方程出自动力系统研究的需要. 除了上述方程以外，还有与 Feigenbaum 现象有关的 Feigenbum 方程

$$\begin{cases} g(x) = -\frac{1}{\lambda} g(g(-\lambda x)), \\ g(0) = 1,\ -1 \leq g(x) \leq 1,\ \forall x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

稳定流形的存在性实际上就是一个函数方程解的存在性问题.

函数方程伴随着迭代理论的发展，从 Abel[1] 、 Babbage[12] 等数学家开始至今，已经形成了一个理论体系. 在大量的文献专著里概括了这一领域的成就，如 Aczél 、 Kuczma 等人的 [2]~[5] 、 [8] 、 [15] 、 [24] 、 [25] 等等. 它已成为与微分方程、差分方程和动力系统紧密相关的现代数学分支，在实验科学和工程科学研究中越来越起着重要的作用.

[习题 1] 考虑迭代方程 $\lambda f(x) + (1-\lambda) f^2(x) = F(x)$, $\quad x \in I = [a, c]$, $0 < \lambda < 1$, 其中 $F(x) = \alpha e^x - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, $c = \alpha(e^c - 1) > 0$. 证明该方程有连续解.

[习题 2] 当 $n = 2$ 时, 如果已知函数严格递增, 具体地说, 如果 $F \in X(\delta, \lambda_1 M)$, 其中 $\delta > 0$, $M > 0$, $\lambda_1 > \delta/M \geq \lambda_2$, 证明方程 (ITn) 在 $X(0, M)$ 存在唯一解，且该解连续依赖于已知函数.

[习题 3] 考虑方程

$$\lambda_2 f^2(x) + \lambda_1 f(x) + \lambda_0 x = 0, \quad x \in I = [0, 1] \tag{8.24}$$

其中 $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1>\lambda_2>0$. 证明：方程 (8.24) 保持端点不动的连续递增解只有平凡解 $f(x)\equiv x$.

[习题 4] 证明在定理 3 条件下方程 (8.2) 的解对系数 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 连续依赖.

[习题 5] 假设在定理 7 中 r_0 是多项式 P 的复根并分别记 $\mathrm{Re}\,r_0, |r_0|$ 为 r_0 的实部和模. 证明迭代方程 $f^2(x)=2\,\mathrm{Re}\,r_0 f(x)-|r_0|^2x$ 的一切解都满足迭代方程 (8.19) .

参考文献

[1] Abel N.H. Oeuvres complétes, Vol.II. *Christiana*,36-39(1881)

[2] Aczél J. *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York and London, 1966

[3] Aczél J. *Functional Equations: History, Applications and Theory.* D.Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston- Lancaster,1984

[4] Aczél J. *A Short Course on Functional Equations.* D.Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston-Lancaster,1987

[5] Aczél J. and Dhombres J. *Functional Equations Containing Several Variables.* Encyclopedia of Math. & Its Applications, Cambridge University Press 1989

[6] Böedewadt U.T. Zür iteration realler funktionen. *Zeittsc.Math.*,**49**, 3:497-516 (1944)

[7] Carr J. *Applications of Center Manifold Theory.* Appl. Math. Sci. **35**, Springer, New York, 1981

[8] Castillo E. and Ruiz-Cobo M.R. *Functional Equations and Modelling in Science and Engineering.* Marcel Dekker, New York, 1992

[9] Collet P. and J.-P.Eckmann J.-P. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.* Progress on Physics, Vol.I, Birkhäuser, Boston, 1980

[10] Devaney R.L.*et al. Complex Dynamical Systems.* AMS, Providence, 1994

[11] Dhombres,J.G. Itération linéaire d'ordre deux. *Publ. Math. Debrecen***24**: 277-287 (1977)

[12] Dubbey,J.M. *The Mathematical Work of Charles Babbage.* Cambridge University Press, 1978

[13] Falconer J.K. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge Univ Press, 1985

[14] Fort Jr. M.K. The embedding of homeomorphisms in flows. *Proceedings of Amer.Math.Soc.*,**6**:960-967 (1955)

[15] Fort,Jr. M.K. Continuous solutions of a functional equation. *Ann.Polon.Math.*, **13**: 205-211 (1963)

[16] Golubitsky M. and Schaeffer D.G. *Singularities and Groups in Bifurcation*

Theory, vol.1. Appl. Math. Sci.**51**, Springer, New York, 1985

[17] Golubitsky M. Stewart I.N. and Schaeffer D.G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol.2. Appl. Math. Sci.**69**, Springer, New York, 1988

[18] Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983

[19] Hirsh H., Pugh C. and Shub M. *Invariant manifolds*. LN.in Math.**583**, Springer, New York, 1977

[20] Irwin M.C. *Smooth Dynamical Systems*. Academic Press, 1980

[21] Isaacs R. Iterates of fractional order. *Canad.J.Math.*, **2**:409-416 (1950)

[22] Jarczyk W. *A Recurrent Method of Solving Iterative Equations*. Uniwersytet Slaski, Katowice, 1991

[23] Jarczyk W. On an equation of linear iteration. *Aequationes Math.* **51**:303-310 (1996)

[24] Kuczma,M. *Functional equations in a single variable*. Monografie Mat. **46**, PWN-Polish Scientific Publishing, Warszawa, 1968

[25] Kuczma,M., Choczewski,B. and Ger,R. *Iterative functional equations*, Encyclopedia of Math. & Its Applications **32**. Cambridge University Press 1990

[26] Kuroš A.G. *The Theory of Groups*, transl. K.A.Hirsch, vol.1. Chelsea, New York, 1960

[27] Lanford O.E. Remarks on the accumulation of period-doubling bifurcations. *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[28] Li T.-Y. and Yorke J.A. Period three implies chaos. *Amer.Math.Monthly*, **82**:985-992 (1975)

[29] 罗定军，滕利邦. 微分动力系统导引. 北京：高等教育出版社， 1990

[30] 麦结华. 关于迭代函数方程 $f^2(x) = af(x) + bx$ 的通解. 数学研究与评论, **17**, 1:83-90 (1997)

[31] Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H.Freeman, San Francisco, 1982

[32] Matkowski J. The 26th international symposium on functional equations.

Remark 35, *Aequationes Math.*, **37**: 119-120 (1989)

[33] Matkowski J. and Zhang W. Method of characteristic for functional equation in polynomial form. *Acta Math.Sinica(NS)*,**13**, 3: 421-432 (1977)

[34] Matkowski J. and Zhang W. Characteristic analysis for a polynomial-like iterative equation. *Chin.Sci.Bul.*, **43**, 3: 192-196 (1998)

[35] Mukherjea A. and Ratti J.S. On a functional equation involving iterates of a bijection on the unit interval. *Nonlinear Anal.*, **7**: 899-908 (1983)

[36] Nabeya S. On the functional equation $f(p+qx+rf(x)) = a+bx+cf(x)$. *Aequationes Math.*, **11**: 199-211 (1974)

[37] Newhouse S. Nondensity of Axiom A on S^2. *Global Analysis, Proc.Sympos.Pure Math.* **14**, Amer.Math.Soc., Providence, 1970: 191-202

[38] Ng C.T. and Zhang Weinian. Invariant curves for planar mappings. *J. Difference Eqns. Appl.*, **3**:147-168 (1997)

[39] Nitecki Z. *Differentiable Dynamics.* MIT Press, 1971

[40] Palis J. On More-Smale dynamical systems. *Topology*, **8**:385-404 (1969)

[41] Palis J. and Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems*, An introduction. Springer-Verlag, New York, 1982

[42] Peitgen H.-O., Jürgens H. and Saupe D. *Chaos and Fractals.* Springer, New York, 1993

[43] Robbin J.W. On structural stability. *Bull.Amer.Math.Soc.*, **76**:723-726 (1970)

[44] Schröder E. Über iterate funktionen. *Math.Ann.*,**3**: 295-322 (1871)

[45] 司建国. 迭代方程 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$ 局部解析解的存在性. 数学学报, **37**: 590-599 (1994)

[46] 司建国. 关于迭代方程 $G(f(x), f^{n_1}(x), ..., f^{n_k}(x)) = F(x)$ 的连续解. 数学研究与评论, **15**: 149-150 (1995)

[47] 司建国. 一类函数迭代方程的 C^1 类解的讨论. 数学学报, **39**: 247-256 (1996)

[48] Si Jianguo, Zhang Weinian and Cheng S.S. Continuous solutions of an iterative functional inequality on compact interval. *Nonlinear Studies***7**, 1: 105-108 (2000)

[49] Smale S. The Ω-stability theorem, *Global Analysis. Proc.Sympos.Pure Math.***14**, AMS, Providence, 1970: 289-297

[50] Smale S. Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Ann.Scuela Sup.Piza,***17**: 97-116 (1871)

[51] Szlenk W. *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems.* PWN-Polish Sci.Publishers, Waeszawa, 1984

[52] Thompson J.M.T. and Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* John Wiley & Sons, 1986

[53] 张锦炎，钱敏．微分动力系统导引．北京：北京大学出版社， 1991

[54] 张景中，杨路．论逐段单调连续函数的迭代根．数学学报，**26**: 398-412 (1983)

[55] 张景中，杨路，关于 Sarkovskii 序的一些定理．数学进展， **16**,1: 398-412 (1987)

[56] Zhang Jingzhong, Yang Lu and Zhang Weinian. Some advances on functional equations. *Adv.Math.China,* **24**: 385-405 (1995)

[57] 张景中，杨路，张伟年．迭代方程与嵌入流．上海：上海科技教育出版社，1998

[58] 张景中，熊金城．函数迭代与一维动力系统．成都：四川教育出版社， 1992

[59] 张伟年．关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$ 解存在性的讨论．科学通报，**31**,17: 1290-1295 (1986)

[60] Zhang Weinian. Stability of the solution of the iterated equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$. *Acta Math. Sci.,* **8**: 421-424 (1988)

[61] Zhang Weinian. Discussion on the differentiable solutions of the iterated equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$. *Nonlinear Anal.,***15**: 387-398 (1990)

[62] Zhang Weinian. Generalized exponential dichotomies and invariant manifolds for differential equations. *Adv.Math.China,* **22**:1-45 (1993)

[63] Zhang Weinian. A generic property of globally smooth iterative roots. *Science in China,* **A38**, 3: 267-272 (1995)

[64] Zhang Weinian. PM functions, their characteristic intervals and iterative roots. *Annales Polonici Mathematici,* **LXV**.2: 119-128 (1997)

[65] Zhang Weinian. Solutions of equivariance for a polynomial-like iterative

equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **130A**: 1153-1163 (2000)

[66] Zhang Weinian, Baker J.A. Continuous solutions for a polynomial-like iterative equation with variable coefficients. *Ann. Polon. Math.*, **73**: 29-36 (2000)

[67] 张筑生. 北京: 微分动力系统原理, 科学出版社, 1987

[68] 赵立人. 关于函数方程 $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = F(x)$ 解的存在唯一性定理. 中国科技大学学报, 数学专辑: 21-27 (1983)

[69] 朱德明, 韩茂安. 光滑动力系统. 上海: 华东师范大学出版社, 1993

索 引

Q

S

T

W

X

Y

Z